3

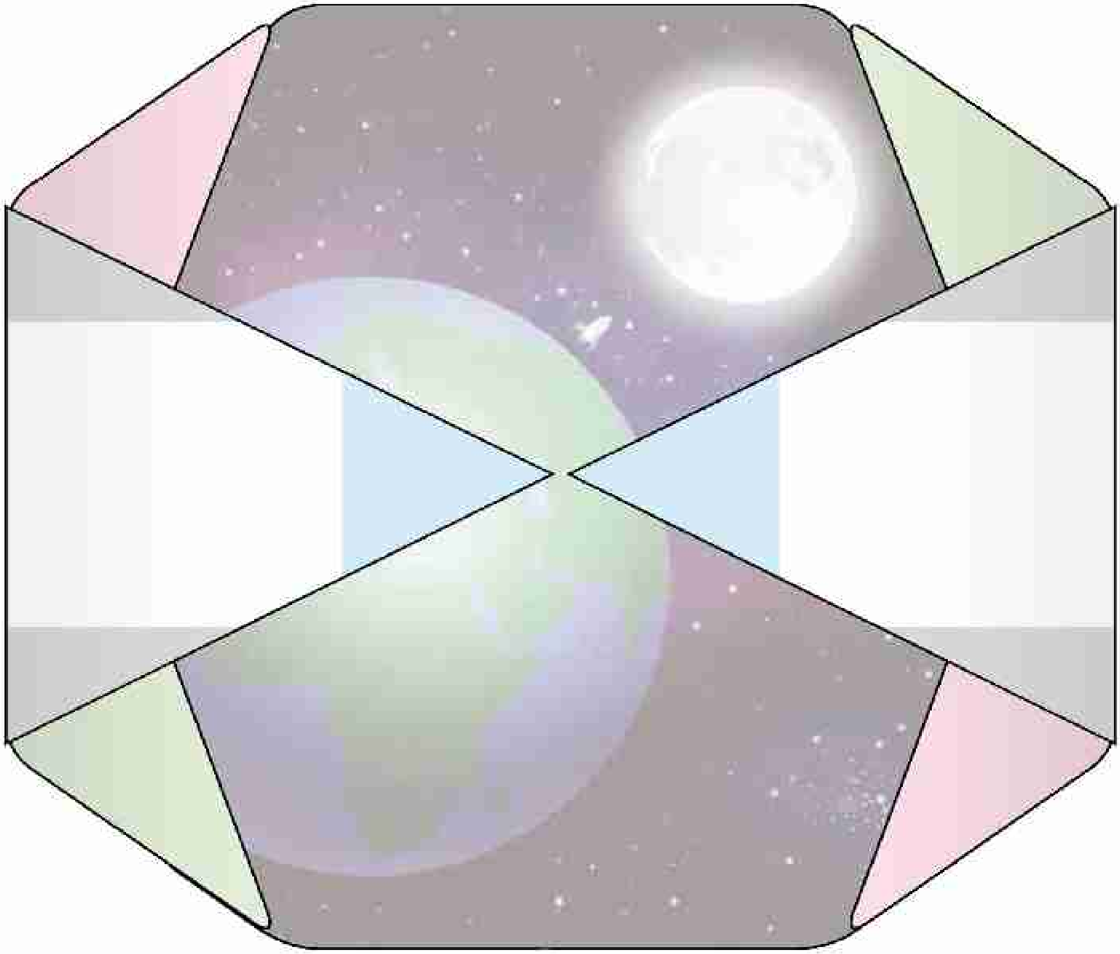
Republique Arabe d'Egypte
Ministere de L'Education et
de L'Enseignement et
L' Enseignement technique
Administration central des
affaires de livres

MATHÉMATIQUES

Livre de l'élève

Troisième préparatoire

Premier semestre



2021 - 2022

بسم الله الرحمن الرحيم

Rédigé par

M. **Omar Fouad Gaballa**

Prof.Dr. **Afaf Abo-ElFoutoh Salah**

Dr. **Essam Wasfy Rouphaiel**

M. **Serafiem Elias Skander**

M. **Kamal Yones Kabsha**

Révisé par

M. **Gamal El Shahed**
conseiller pour les mathématiques

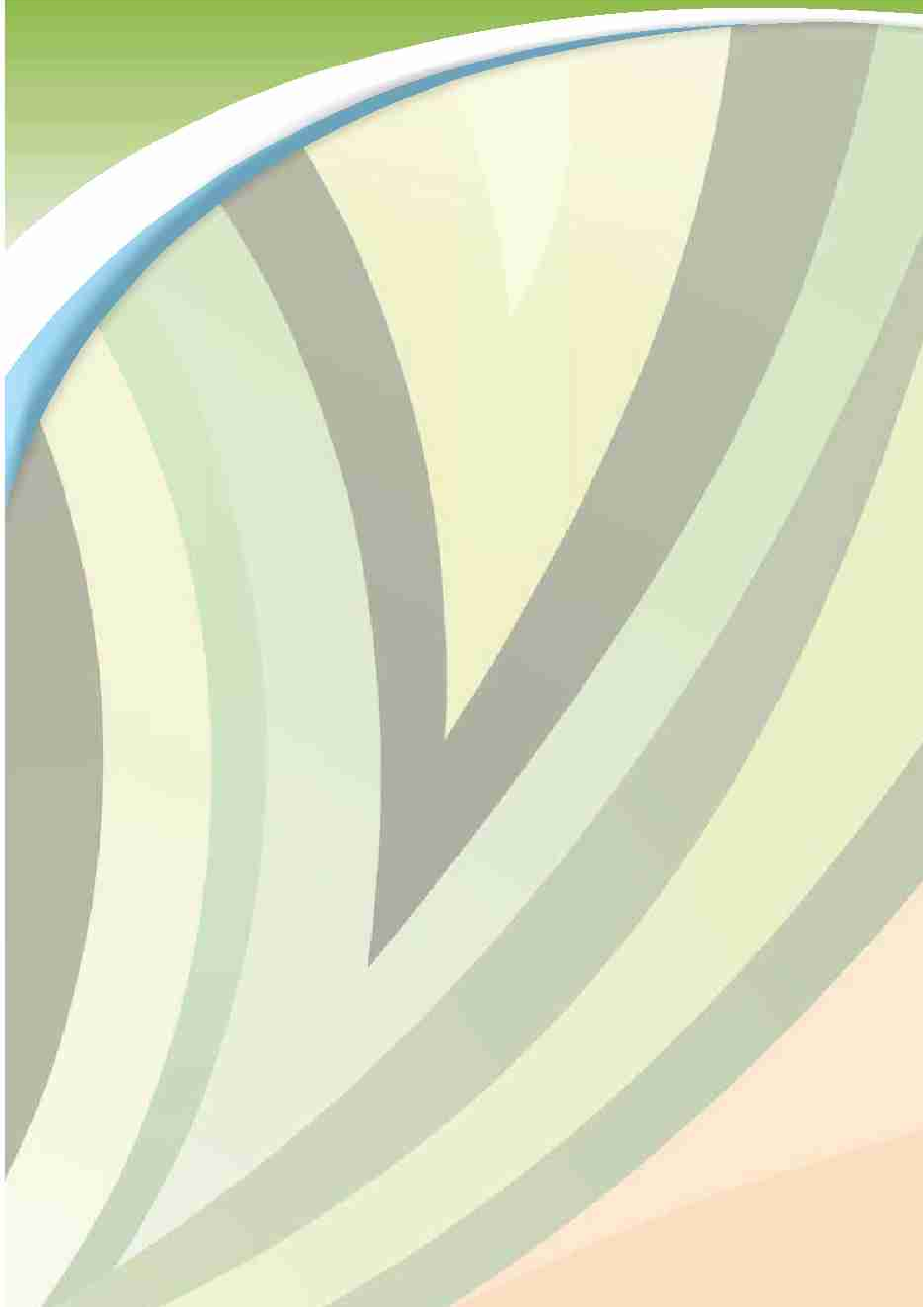
M. **Fathi Ahmed Chehata**

M. **Adel Mohamed Hamza**

M. **Nasser Saad Zaghloul**

Traduction révisée par
l'Institut Français d'Egypte
IFE

Première édition : 2010
Dépôt légal No : 8925/2010
I.S.P.N: 978-977-705-000-5



Introduction

Cher élève,

Nous avons le plaisir de te présenter le manuel de mathématiques de troisième préparatoire. Nous avons tenu à faire de l'apprentissage des mathématiques un travail intéressant et utile qui a son application dans la vie pratique et dans l'apprentissage des autres matières scolaires afin que tu sentes l'importance de l'étude des mathématiques et sa valeur et que tu apprécies le rôle des mathématiciens. Ce manuel présente les activités comme éléments essentiels, et nous avons essayé de présenter le contenu scientifique d'une manière simple pour t'aider à construire tes connaissances mathématiques et à acquérir des méthodes de raisonnements covenables qui favorisent la créativité.

Ce manuel comporte plusieurs unités et chaque unité comporte plusieurs leçons. Les images et les couleurs sont utilisées pour illustrer les notions mathématiques, les propriétés des figures, en utilisant un langage facile et adapté qui tient compte des connaissances acquises. Nous avons également tenu à t'entraîner à découvrir les connaissances visées pour développer ta capacité à l'auto apprentissage. La calculatrice et l'ordinateur sont utilisés à chaque fois que l'occasion se présente. Chaque leçon comporte des exercices et chaque unité comporte des exercices généraux, des activités concernant le portfolio et une épreuve. A la fin du manuel, nous proposons des épreuves générales, pour t'aider à réviser la totalité du programme, et des indications pour les réponses de certains exercices.

Nous espérons que ce travail sera bénéfique pour toi et pour notre chère Egypte.

Les auteurs

Sommaire

Algèbre

Unité 1: Relations et fonctions

Unité (2) : Rapport et proportion – variation directe et variation inverse

Statistique

Unité (3) : Statistique

Trigonométrie

Unité (4) : Trigonométrie

Géométrie analytique

Unité (5) : Géométrie analytique

SYMBOLES MATHÉMATIQUES UTILISÉS

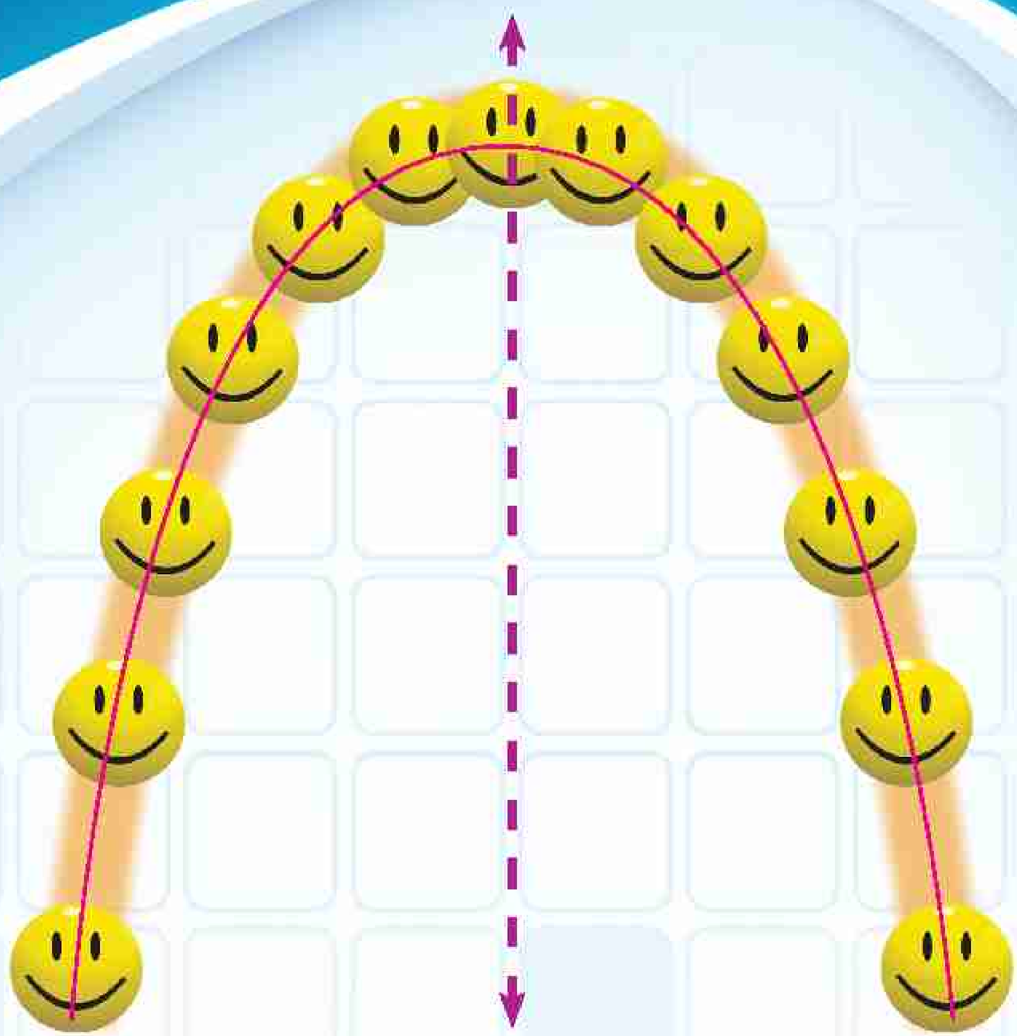
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels	$\perp$	perpendiculaire à
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers	$//$	parallèle à
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels	$\overline{AB}$	le segment AB
$\mathbb{Q}'$	ensemble des nombres irrationnels	$\overrightarrow{AB}$	la demi-droite AB
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels	$\overleftrightarrow{AB}$	la droite AB
$\sqrt{a}$	racine carré de a	$m(\angle A)$	mesure de l'angle A
$\sqrt[3]{a}$	racine cubique de a	$m(\widehat{AB})$	mesure de l'arc AB
$[a , b]$	intervalle fermé	$\sim$	semblable à
$]a , b[$	intervalle ouvert	$>$	plus grand que
$[a , b[$	intervalle semi-fermé	$\geqslant$	plus grand ou égal à
$]a , b]$	intervalle semi-ouvert	$<$	plus petit que
$[a , +\infty[$	intervalle illimité	$\leqslant$	plus petit ou égal à
$\equiv$	superposition	$p(A)$	probabilité de l'événement A
card (A)	nombre d'éléments de A	$\overline{x}$	moyenne arithmétique
E	espace des éventualités	σ	écart type
Σ	somme		

Algèbre

Relations et fonctions

Equations

Fonctions rationnelles et opérations



Un joueur a lancé un ballon qui a suivi le trajet indiqué par la figure ci-dessus.

Cette courbe représente une fonction, que tu étudieras, appelée une fonction du second degré.

1 - 1 Produit cartésien

A apprendre

☆ Comment trouver le produit cartésien de deux ensembles non vides.

Expressions de base :

☆ Couple
☆ Produit cartésien
☆ Diagramme sagittal
☆ Diagramme cartésien
☆ Relation

Réfléchis et discute

Nous avons déjà étudié la relation entre deux variables x et y.

1. Trouve l'ensemble des couples vérifiant la relation :
   $y = 2x - 1$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$
2. Représente ces couples graphiquement dans un repère cartésien.
3. Est-ce que le couple (3 , 5) est égal au couple (5 , 3) ?
   (Aide-toi de la figure)

De ce qui précède, on remarque que :

1. Dans un couple (a , b), a est appelée la première composante du couple et b est appelée la deuxième composante du couple.
2. Tout couple est représenté par un point et un seul dans un repère cartésien.
3. *Si* $a \neq b$, *alors* $(a , b) \neq (b , a)$, Pourquoi ?
4. $(a , b) \neq \{a , b\}$.
5. *Si* $(a , b) = (x , y)$, *alors* $a = x$, $b = y$

Exemple 1

Si : $(x - 2 , 3) = (5, y + 1)$, ***trouve*** la valeur de x et y

Solution

$x - 2 = 5 \quad \therefore x = 7 \qquad$ et $\qquad 3 = y + 1 \quad \therefore y = 2$

Pour t'entraîner :

Trouve **la valeur de a et b dans chacun des cas suivants :**

A. $(a , b) = (-5 , 9)$
B. $(a - 2 , b + 1) = (2 , -3)$
C. $(6 , b - 3) = (2 - a , -1)$
D. $(a - 7 , 26) = (-2, b^3 - 1)$

Exemple 2

Si $X = \{a , b\}$ et $Y = \{-1 , 0 , 3\}$, trouve : $X \times Y$ et $Y \times X$, **Que remarques-tu ?**

Solution

Pour trouver le produit cartésien des deux ensembles X et Y, noté $X \times Y$, on écrit l'ensemble de tous les couples ayant pour première composante un élément de X, et pour deuxième composante un élément de Y.

De même : $X \times Y = \{a , b\} \times \{-1 , 0 , 3\} = \{(a , -1) , (a , 0), (a , 3) , (b , -1), (b , 0), (b , 3)\}$

$Y \times X = \{-1 , 0 , 3\} \times \{a , b\} = \{(-1 , a), (-1 , b), (0 , a), (0 , b), (3 , a), (3 , b)\}$

On remarque que : $X \times Y \neq Y \times X$

On peut obtenir $X \times Y$ et $Y \times X$ à partir des deux tableaux suivants :

×		Deuxième composante		
		-1	0	3
Première composante	a	(a , -1)	(a , 0)	(a , 3)
	b	(b , -1)	(b , 0)	(b , 3)

×		Deuxième composante	
		a	b
Première composante	-1	(-1 , a)	(-1 , b)
	0	(0 , a)	(0 , b)
	3	(3 , a)	(3 , b)

Réfléchis :

1. Dans quelles conditions a-t-on $X \times Y = Y \times X$?
2. $X \times Y$ et $Y \times X$ ont-ils le même nombre d'éléments ?

Remarques :

1. *Si* X et Y sont deux ensembles finis non vides, alors :

   $X \times Y = \{(a , b) : a \in X , b \in Y\}$

2. $X \times Y \neq Y \times X$ *où* : $X \neq Y$

   card $(X \times Y)$ = card $(Y \times X)$ = card $(X) \times$ card (Y)

   où « card » désigne le nombre d'éléments d'un ensemble.

3. *Si* $(k , m) \in X \times Y$, *alors* $k \in X$ et $m \in Y$

4. *Si* X est un ensemble non vide, alors :

   $X \times X = \{(a , b) : a \in X, b \in X\}$

   peut s'écrire X^2 et qui se lit « X deux ».

Exemple 3

Si $X = \{1\}$, $Y = \{2 , 3\}$ et $Z = \{2 , 5 , 6\}$, représente les ensembles X , Y et Z par un diagramme de Venn, puis trouve :

1 **A** $X \times Y$ **B** $Y \times Z$ **C** $X \times Z$ **D** Y^2

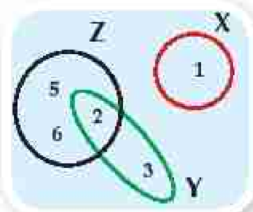
2 $(X \times Y) \cup (Y \times Z)$

3 $X \times (Y \cap Z)$

4 $(X \times Y) \cap (X \times Z)$

5 $(Z - Y) \times (X \cup Y)$

Solution



1 **A** $X \times Y = \{1\} \times \{2 , 3\} = \{(1 , 2) , (1 , 3)\}$

B $Y \times Z = \{2 , 3\} \times \{2 , 5 , 6\}$

$= \{(2 , 2) , (2 , 5) , (2 , 6) , (3 , 2) , (3 , 5) , (3 , 6)\}$

C $X \times Z = \{1\} \times \{2 , 5 , 6\} = \{(1 , 2) , (1 , 5) , (1 , 6)\}$

D $Y^2 = Y \times Y = \{2 , 3\} \times \{2 , 3\}$

$= \{(2 , 2) , (2 , 3) , (3 , 2) , (3 , 3)\}$

2 $(X \times Y) \cup (Y \times Z) = \{(1 , 2) , (1 , 3) , (2 , 2) , (2 , 5) , (2 , 6) , (3 , 2) , (3 , 5) , (3 , 6)\}$

3 $X \times (Y \cap Z) = \{1\} \times \{2\} = \{(1 , 2)\}$

4 $(X \times Y) \cap (X \times Z) = \{(1 , 2) , (1 , 3)\} \cap \{(1 , 2) , (1 , 5) , (1 , 6)\} = \{(1 , 2)\}$

5 $Z - Y = \{5 , 6\}$ $\therefore (Z - Y) \times (X \cup Y) =$ .... Complète

Pour t'entraîner :

Si $X = \{2 , -1\}$, $Y = \{4 , 0\}$ et $Z = \{4 , 5 , -2\}$, trouve :

A $X \times Y$ **B** $Y \times Z$ **C** X^2

D card $(X \times Z)$ **E** card (Y^2) **F** card (Z^2)

Représentation du produit cartésien :

Exemple 4

1 Si $X = \{1 , 2\}$ et $Y = \{3 , 4 , 5\}$, ***trouve :*** $X \times Y$, puis représente-le par :

a) Un diagramme sagittal. **b) Un diagramme cartésien.**

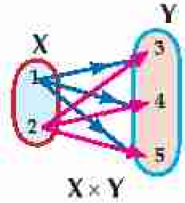
Solution

X × Y = {1 , 2} × {3 , 4 , 5} = {(1 , 3) , (1 , 4) , (1 , 5) , (2 , 3) , (2 , 4) , (2 , 5)}

Le produit cartésien X × Y peut être représenté par un diagramme sagittal ou par un diagramme cartésien comme suit :

1 Le diagramme sagittal

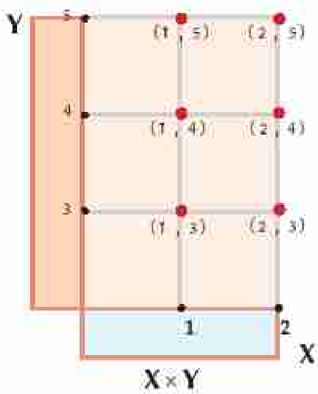
On trace une flèche de chaque élément de la première composante (les éléments de l'ensemble X) vers chaque élément de la deuxième composante (les éléments de l'ensemble Y)



Donc, le diagramme sagittal du produit cartésien représente chaque couple par une flèche partant de la première composante vers la deuxième composante.

2 Le diagramme cartésien (le quadrillage graphique orthogonal) :

Sur un quadrillage graphique orthogonal, on représente les éléments de l'ensemble X sur l'axe horizontalement et l'ensemble Y sur l'axe verticalement. Les points d'intersection des droites horizontales avec les droites verticales représentent les couples éléments du produit cartésien X x Y.



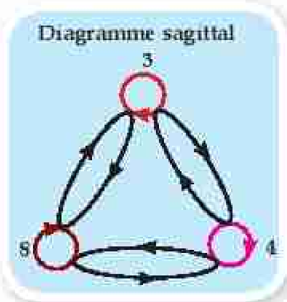
Exemple 5

Si X = {3 , 4 , 8}, trouve X × X, puis représente-le par un diagramme sagittal.

Solution

X × X = {3 , 4 , 8} × {3 , 4 , 8}

={(3 , 3) , (3 , 4) , (3 , 8) , (4 , 3) , (4 , 4) , (4 , 8) , (8 , 3) , (8 , 4) , (8 , 8)}.



Dans la figure, on remarque que les couples sont représentés par des flèches et que les couples ayant deux composantes égales comme (3 , 3) , (4 , 4) et (8 , 8) sont représentés par des boucles pour indiquer que chaque flèche part d'un point vers lui-même.

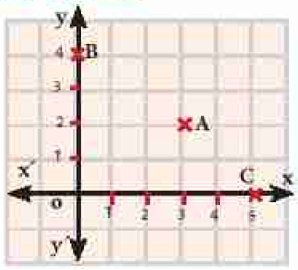
On remarque également que : card (X) = 3, d'où card (X × X) = 3 × 3 = 9

Dans ce cas, le produit cartésien X × X est représenté graphiquement par neuf points et chaque point représente un couple. Si X est un ensemble infini (qui a une infinité d'éléments), alors : le nombre d'éléments de X × X est infini.

Réfléchis : Comment peut-on représenter les produits cartésiens suivants ?

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Le produit cartésien de deux ensembles infinis et sa représentation :



1 Pour représenter le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x , y) : x \in \mathbb{N} , y \in \mathbb{N}\}$

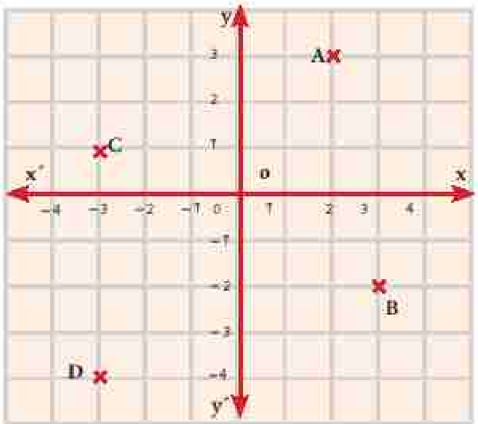
1. On trace deux droites perpendiculaires dont l'une est la droite horizontale $\overleftrightarrow{xx'}$ et l'autre est la droite verticale $\overleftrightarrow{yy'}$ qui se coupent au point o.
2. On représente les nombres naturels $\mathbb{N}$ sur chacune des deux droites en partant du point 0 qui représente le nombre zéro.
3. On trace des droites verticales et d'autres horizontales passant par les points qui représentent les nombres naturels. On obtient la figure ci-contre. Les points d'intersection de ces droites les unes avec les autres représentent le quadrillage graphique orthogonal du produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

On remarque que : Tout point du quadrillage représente un couple du produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Par exemple : le point A représente le couple (3 , 2) et le point B représente le couple (0 , 4).

Complète : Le point C représente le couple (.... , ...) , et le point o représente le couple (.... , ...).

2 Pour représenter le produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x , y) : x \in \mathbb{Z} , y \in \mathbb{Z}\}$.



On représente l'ensemble des nombres entiers sur la droite horizontale et sur la droite verticale où le point o représente le couple (0 , 0).
Dans ce cas , tout point du quadrillage représente un couple du produit cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Ce quadrillage est appelé « le repère cartésien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ».

Pour t'entraîner :

Détermine les couples représentant les points A , B , C et D dans le quadrillage graphique précédent.

3 Pour représenter le produit cartésien $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x , y) : x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}\}$

Trace un quadrillage graphique orthogonal, puis représente l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sur la droite horizontale et sur la droite verticale. Sur ce quadrillage , détermine les points :
A $(3 , \frac{5}{2})$, B $(-\frac{3}{2} , 4)$, C $(-3 , -\frac{3}{2})$ et D $(\frac{5}{2} , -\frac{3}{2})$

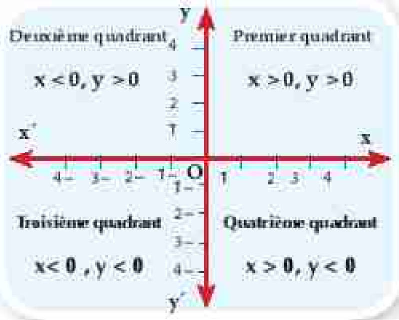
4 Représentation du produit cartésien R X R = {(x , y) : x ∈ R et y ∈ R}

On représente l'ensemble des nombres réels sur la droite horizontale et sur la droite verticale où le point O représente le couple (0 , 0).

La droite $\overleftrightarrow{xx'}$ est appelée l'axe des abscisses ou l'axe des x

La droite $\overleftrightarrow{yy'}$ est appelée l'axe des ordonnées ou l'axe des y.

Le quadrillage est partagé en quatre quadrants comme le montre la figure ci-contre :



Exemple 6

Trace un quadrillage graphique orthogonal représentant le produit cartésien ℝ × ℝ, puis cite le quadrant ou l'axe auquel appartient chacun des points suivants :

A (3 , 3), B (3 , -2), C (-4 , -2), D (-4 , 3), E (0 , - 3) et F(2 , 0)

Solution

A (3 , 3) est situé dans le premier quadrant.

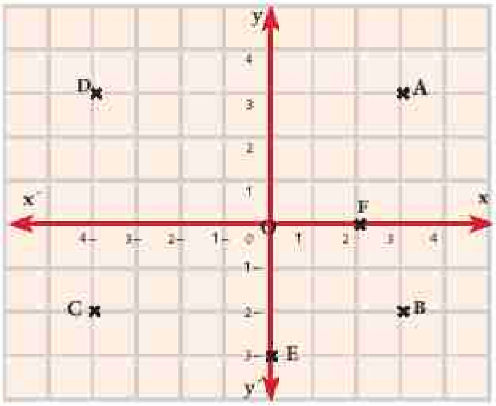
B (3 , -2) est situé dans le quatrième quadrant.

C (- 4 , - 2) est situé dans le troisième quadrant.

D (- 4 , 3) est situé dans le deuxième quadrant.

E (0 , - 3) est situé sur l'axe des ordonnées.

F (2 , 0) est situé sur l'axe des abscisses.



Pour t'entraîner :

Si X = [- 2 , 3], détermine la région à laquelle appartient X × X.

Lesquels des points suivants appartiennent à X × X

A (1 , 2), B (3 , - 1), C (- 1 , 4) et D (-2 , 0) ?

Exercices 1-1

(1) Complète ce qui suit :

1. Si (a + 5 , 3) = (8 , b - 1), alors a = ... et b = ...
2. Si $(x^5 , y + 1) = (32 , \sqrt[3]{27})$, alors x = ... et y = ...

3. Si $(x - 1 , 11) = (8 , y + 3)$, alors $\sqrt{x + 2y} =$ ………

4. Si card $(X^2) = 9$, alors card $(X) =$ ………

5. Si $X \times Y = \{(2 , 6), (2 , 9), (3 , 6), (3 , 9), (5 , 6), (5 , 9)\}$, alors

$X =$ ……… et $Y =$ ………

(2) Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si card $(X) = 3$, card $(X \times Y) = 12$, alors card (Y) est égal à : …………

   A 4 B 9 C 15 D 36

2. Si $(3 , 5) \in \{3 , 6\} \times \{x, 8\}$, alors $x =$ …………

   A 8 B 6 C 5 D 3

3. Si le point $(5 , b - 7)$ est situé sur l'axe des abscisses, alors $b =$ …………

   A 2 B 5 C 7 D 12

4. Si le point $(x- 4 , 2 - x)$ où $x \in Z$ est situé au troisième quadrant, alors x est égale à :

   A 2 B 3 C 4 D 6

(3)

1. Si $X = \{2, 3\}$ et Y $\{3, 4, 5\}$, trouve :

   A $X \times Y$ et représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien

   B card $(X \times Y)$ C card (Y^2) D $(X \times Y) \cap Y^2$

2. Si $X \times Y = \{(1 , 1), (1 , 3), (1 , 5)\}$, trouve :

   A X, Y B $Y \times X$ C Y^2

3. Si : $X = \{3, 4\}$, $Y = \{4, 5\}$ et $Z = \{6, 5\}$, trouve :

   A $X \times (Y \cap Z)$ B $(X - Y) \times Z$ C $(X - Y) \times (Y - Z)$

4. Sur un quadrillage graphique orthogonal du produit $R \times R$, détermine les points suivants :

   A (4 , 5), B (6 , -3), C (-2 , 7), D (-1 , 6), E (-4 , -5), M (0 , 6), K (9 , 0)

   Dis ensuite à quel quadrant ou à quel axe appartient chacun de ces points.

Relations

1 - 2

Réfléchis et discute



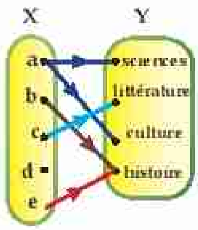
Dans le cadre du festival « La lecture pour tous », cinq élèves représentés par l'ensemble X = {a , b , c , d , e} sont allés à une bibliothèque pour lire quelques livres représentés par l'ensemble Y = {sciences , littérature , culture , histoire}. L'élève (a) a lu de sciences et un livre de culture. L'élève livre (b) a lu un livre livre d'histoire. L'élève (c) a lu un livre de littérature. L'élève (e) a lu un livre d'histoire. L'élève (d) n'a lu aucun livre.

1) Ecris les phrases précédentes sous forme de couples de X vers Y.

2) Représente l'ensemble des couples précédents par un diagramme sagittal.

Remarque que : L'expression « a lu » relie quelques éléments de l'ensemble X à quelques éléments de l'ensemble Y d'où l'expression « a lu » détermine une relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y.

Une relation est habituellement symbolisée par la lettre R et cette relation peut être représentée par un diagramme sagittal comme l'indique la figure ci-contre où on trace une flèche partant d'un élève en allant vers le domaine du livre lu.



Nous pouvons exprimer la relation de X vers Y par l'ensemble des couples suivants :

{(a , sciences) , (a , littérature) , (b , histoire) , (c , littérature) , (e , histoire)}

Cet ensemble de couples est appelé le graphe de la relation R.

Réfléchis : Est-ce que le graphe G de la relation R est un sous-ensemble du produit cartésien X × Y ?



A apprendre

- ☆ La notion d'une relation d'un ensemble X à un ensemble Y.
- ☆ La notion d'une relation d'un ensemble X vers lui-même.

Expressions de base

- ☆ Relation.
- ☆ Graphe d'une relation.

Exemple 1

Soient X = {-1 , 1 , 2} et Y = {2 , 4 , 6 , 8}, R est une relation de X vers Y où a R b signifie que « b = 2a + 4 » pour tout a ∈ X, b ∈ Y.

Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

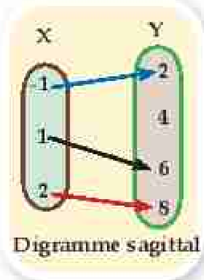
Solution

Pour : a = -1 ∴ b = 2 × (-1) + 4 = 2

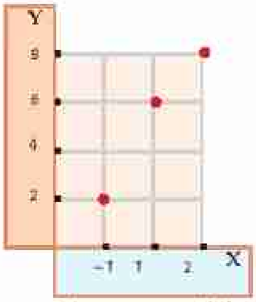
Pour : a = 1 ∴ b = 2 × 1 + 4 = 6

Pour : a = 2 ∴ b = 2 × 2 + 4 = 8

∴ R = {(-1 , 2), (1 , 6), (2 , 8)}



Digramme sagittal



Digramme cartésien

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y, où X et Y sont des ensembles non vides, relie quelques éléments ou tous les éléments de X à quelques éléments ou tous les éléments de Y.
2. Le graphe de la relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y est un ensemble de couples ayant pour première composante un élément de X et pour deuxième composante un élément de Y.
3. Si R est une relation de X vers Y, alors R ⊂ X × Y.

Relation sur un ensemble :

Si R est une relation de X vers X, on dit que R est une relation sur X. Dans ce cas, R ⊂ X × X.

Exemple 2

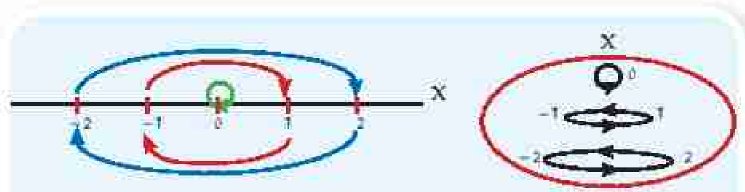
Soit X = {-2, -1, 0, 1, 2}. R est une relation définie sur X où a R b signifie que :

« le nombre a est l'opposé du nombre b » pour tout a ∈ X , b ∈ X

Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

Solution

R = {(-2 , 2), (-1 , 1), (0 , 0), (1 , -1), (2 , -2)}



Digramme sagittal

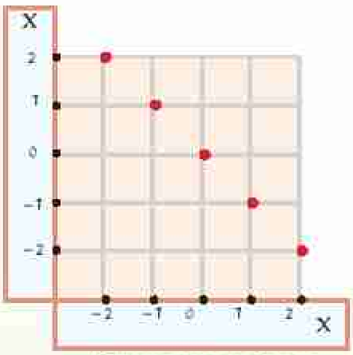


Diagramme cartésien

Pour t'entraîner :

Soient X = {1 , 2 , 3} et Y = {12 , 21 , 47 , 52}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que : « a est un chiffre du nombre b » pour tout a ∈ X, b ∈ Y.

1. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.
2. Lesquelles des propositions suivantes sont justes ? Justifie ta réponse :

1 R 52   2 R 21   3 R 47

Exercices 1-2

1 Soit X = {1, 2, 4, 6, 10}. R est une relation sur X, où a R b signifie que **(a est un multiple de b)**, pour tout a ∈ X , b ∈ X. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

2 Soient X = {2 , 4 , 5 , 7} et Y = {4 , 5 , 6 , 7 , 9}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que (a ⩽ b) pour tout a ∈ X et b ∈ Y . Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

3 Soient X = {1, 2, 3} et Y = {1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que **«le nombre a est l'inverse du nombre b»** pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

4 Soient X = {1, 3, 4, 5} et Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que «a + b = 7» pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

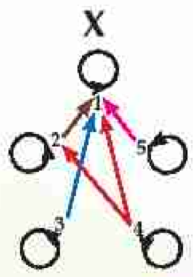
5 Soient X = {-1, 0, 1, 2, 3} et Y = {0, 1, 4, 6, 9}. R est une relation de X vers Y où b signifie que «a^2 = **b**» pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

6 Soient X = {- 2, -1, 1, 2} et Y = {$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 8}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que «a^3 = b» pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien.

7 Soient X = {2, 3, 4} et Y = {6, 8, 10, 11, 15}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que «a **divise b**» pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R .

8 **La figure ci-contre :**

Représente le diagramme sagittal de la relation R définie sur l'ensemble X = {1, 2 , 3, 4 , 5}. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme cartésien.



1 - 3

Fonction (application)

A apprendre

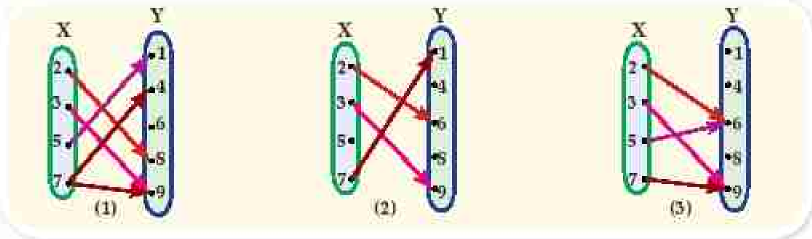
- La notion de fonction.
- Expression symbolique d'une fonction.

Expressions de base

- Fonction.
- Domaine de définition.
- Ensemble d'arrivée.
- Ensemble-image.

Réfléchis et discute

Les figures suivantes représentent des relations de X vers Y.



1. Écris le graphe de chaque relation puis représente-le par un diagramme cartésien
2. Lesquelles des relations suivantes vérifient la condition suivante : « chaque élément de X est relié à un élément et un seul élément de Y ».

Définition :

Une relation d'un ensemble X vers un ensemble Y est dite fonction si chaque élément de X apparaît une fois et une seule comme première composante dans un couple du graphe de la relation.

Expression symbolique d'une fonction :

1. Une fonction est symbolisée par l'une des lettres : f ou m ou q ou... La fonction f de l'ensemble X vers l'ensemble Y s'écrit mathématiquement :

   $f : X \rightarrow Y$ qui se lit : «f est une fonction de X vers Y».

Remarques :

1. Si f est une fonction de X vers X, on dit que f est une fonction définie sur X.
2. Si le couple (x, y) appartient au graphe de la fonction, on dit que l'élément y est l'image de l'élément x par la fonction f et on l'exprime par l'une des deux formes suivantes :

   $f : x \mapsto y$ qui se lit « y est l'image de x par la fonction f »

   $f(x) = y$ qui se lit « f est une fonction telle que $f(x) = y$

Exemple 1

Soit f une fonction définie sur X telle que X = {3 , 4 , 5 , 6}. Si f(3) = 3 , f(4) = 5 , f(5) = 4 et f(6) = 5 , représente f par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien puis écris le graphe de f.

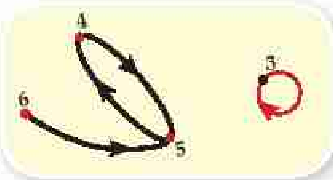


diagramme sagittal

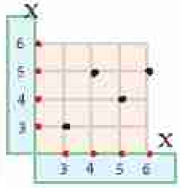


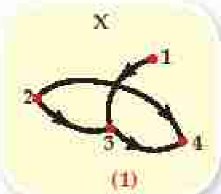
diagramme cartésien

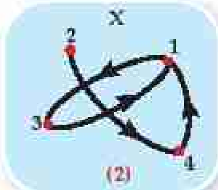
Solution

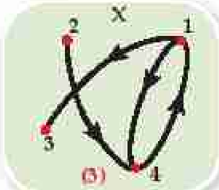
Le graphe de f = {(3, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 5)}

Pour t'entraîner :

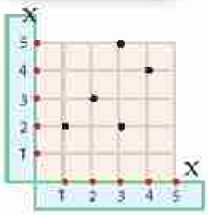
1. Si X = {1 , 2 , 3 , 4}, lesquels des diagrammes sagittaux ci-contre représentent des fonctions définies sur X ?



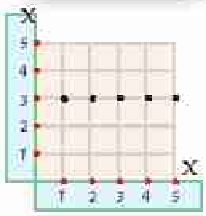




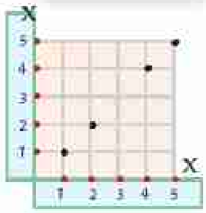
2. Lesquels des diagrammes cartésiens ci-contre représentent des fonctions de X vers X ?



(1)



(2)



(3)

Réfléchis : **Est-ce que toute relation est une fonction ? Justifie ta réponse en donnant des exemples.**

Domaine de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image

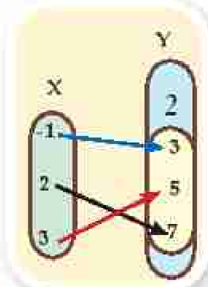
Si f est une fonction de l'ensemble X vers l'ensemble Y.

où f : X → Y , alors

L'ensemble X est appelé le domaine de définition de la fonction f.

L'ensemble Y est appelé l'ensemble d'arrivée de la fonction f.

L'ensemble des images des éléments de X par la fonction f est appelé l'ensemble image de la fonction.



Par exemple : Si f : X → Y

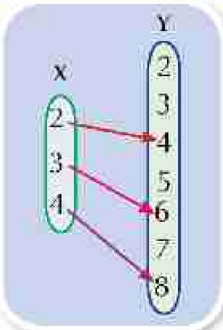
, X = {- 1, 2, 3}, Y = {2, 3, 5, 7} et le graphe de f = {(-1, 3), (3, 5), (2, 7)}, alors :

1. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble X = {-1 , 2 , 3}
2. L'ensemble d'arrivée de la fonction f est l'ensemble Y = {2 , 3 , 5 , 7}
3. L'ensemble image de la fonction f = {3 , 5 , 7}

Remarque que : L'ensemble image d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble d'arrivée.

Exemple 2

Soient X = {2, 3, 4} et Y = {y : y ∈ ℕ , 2 ≤ y < 9} où ℕ est l'ensemble des nombres naturels. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que : « $a = \frac{1}{2}b$ » pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal. Démontre que R est une fonction de X vers Y, puis trouve son ensemble-image.



Solution

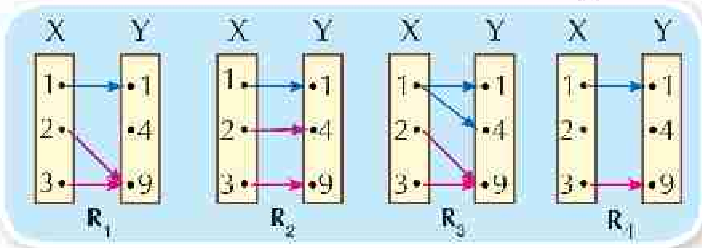
Y = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}   Le graphe de R = {(2, 4), (3, 6), (4, 8)}

R est une fonction car de chaque élément de l'ensemble X part une flèche et une seule vers un élément de l'ensemble Y.

l'ensemble image de la fonction = {4,6,8}

Exercices 1-3

1 Lesquelles de relations suivantes représentent des fonctions de X vers Y ? Pour chaque relation représentant une fonction, détermine l'ensemble image.



2 Soient X = {2, 5, 8}, Y = {10, 16, 24, 30} et R est une relation de X vers Y où a R b signifie que « a est un facteur de b » pour tout a ∈ X et b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien. **R est-elle une fonction ? Pourquoi ?**

3 Soient X = {0, 1, 4, 7} et Y = {1, 3, 5, 6}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que «a + b < 8» pour tout a ∈ X, b ∈ Y. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien. R est-elle une fonction ? Pourquoi ?

4 Soit X ={1, 2 , 4 , 6 , 10} et R est une relation définie sur X où a R b signifie que « a est un facteur de b » pour tout a ∈ X , b ∈ X. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien. R est-elle une fonction ? Pourquoi ?

5 Soit X = {1 , 2 , 3 , 6, 11} et R est une relation définie sur X où a R b signifie que « a + 2b = un nombre impair » pour tout a ∈ X et b ∈ X. Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien. **R est-elle une fonction ? Pourquoi ?**

1 - 4

Fonctions polynômes

Réfléchis et discute

Dans les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 3x - 8$
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = 4x^2 - 5x + 8$

On remarque que :

1. Le domaine de définition et l'ensemble d'arrivée sont l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. La formule donnant l'image de x est un terme ou une expression algébrique.
3. Quel est le degré de la variable x dans les fonctions précédentes ?

Définition

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ où $a_0, a_1, a_2, ... a_n \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$, est appelée fonction polynôme réelle du degré n.

Le degré : d'une fonction polynôme est la plus grande puissance de la variable dans l'expression de la fonction.

Pour t'entraîner :

1. Lesquelles des fonctions suivantes représentent des fonctions polynômes ?

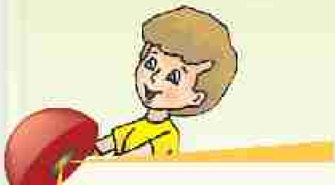
   A $f_1(x) = x^3 + x^2 + 3$ B $F_2(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 7$

   C $f_3(x) = x^2 + \sqrt{x} + 8$ D $F_4(x) = x(x + \frac{1}{x} - 2)$

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, détermine le degré de la fonction dans chacun des cas suivants :

   A $f(x) = 3 - 2x$ B $f(x) = x^2 - (x^2 - 3)$

   C $f(x) = x(x - 2x^2)$ D $f(x) = x^2 (x - 3)^2$



A apprendre

☆ La notion d'une fonction affine et sa représentation graphique.

Expressions de base :

☆ Une fonction polynôme.
☆ Une fonction linéaire.
☆ Une fonction du second degré.
☆ Représentation graphique d'une fonction.

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 - x + 3$, trouve : $f(-2)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$

Solution

$\because f(x) = x^2 - x + 3$ $\therefore f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

$f(0) = 3$, $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 3 = 6 - \sqrt{3}$

Pour t'entraîner :

Si $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x - 3$,

A trouve $f(\sqrt{2}) + 3\,g(\sqrt{2})$

B démontre que $f(3) = g(3) =$ zéro

Fonction affine

Définition

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a\,x + b$ où $a \in R$ et $b \in R$, $a \neq 0$ est appelée fonction affine ou fonction du premier degré.

Représentation graphique d'une fonction affine :

Exemple 2

Représente graphiquement la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = 2x - 3$

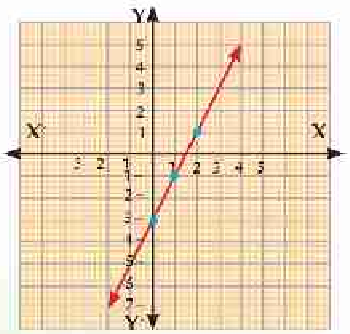
Solution

$\because f(x) = 2x - 3$

$\therefore f(0) = 0 - 3 = -3$, $f(1) = 2 - 3 = -1$, $f(2) = 4 - 3 = 1$

Nous pouvons présenter les couples obtenus dans un tableau comme suit :

x	0	1	2
y = f(x)	-3	-1	1



On représente les couples obtenus sur un quadrillage graphique du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarques :

1. Il suffit de trouver deux couples appartenant au graphe de la fonction pour la représenter mais il est préférable de calculer un troisième couple pour s'assurer de la qualité de la représentation graphique de la fonction.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a\,x$, où $a \neq 0$, est représentée graphiquement par une droite qui passe par le point d'origine (0 , 0)

Pour t'entraîner :

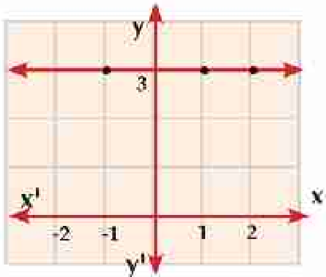
Représente graphiquement chacune des fonctions suivantes :

1. $f : f(x) = x + 2$
2. $g : g(x) = 3\,x$
3. $\ell : \ell(x) = -2\,x$

Cas particulier : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = b$ où $b \in \mathbb{R}$, alors f est appelée fonction constante.

Par exemple : La fonction $f(x) = 3$ s'écrit $y = 3$

x	-1	1	2
y = f(x)	3	3	3



Elle est représentée graphiquement par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Pour t'entraîner :

Représente graphiquement chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = -4$
3. $f(x) = 0$
4. $f(x) = 2\frac{1}{2}$

Fonction du second degré :

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est appelée fonction du second degré ou fonction du deuxième degré.

Représentation graphique d'une fonction du second degré.

Exemple 3

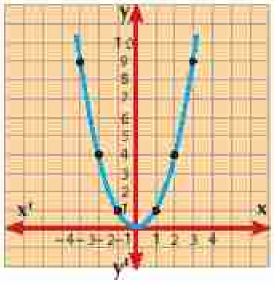
Représente graphiquement la fonction du second degré f, telle que $f(x) = x^2$ où $x \in \mathbb{R}$ en prenant $x \in [-3\,,\,3]$.

Solution

On détermine quelques couples (x , f(x)) appartenant au graphe de la fonction f où $x \in \mathbb{R}$ en prenant $x \in [-3\,,\,3]$ pour calculer quelques valeurs de la variable x.

$f(-3) = 9$, $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$

On présente les couples obtenus dans un tableau comme suit :



x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y = f(x)	9	4	1	0	1	4	9

On détermine dans un repère cartésien les points représentant les couples, puis on trace la courbe passant par ces points.

On remarque que :

1. La courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe de symétrie a pour équation $x = 0$
2. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (0 , 0) et la valeur minimale de la fonction = 0

En général :

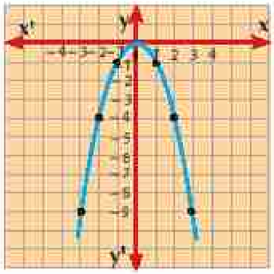
La fonction $f(x) = a x^2 + b x + c$, où a ; b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, a les propriétés suivantes:

1. **Les coordonnées des sommets de sa courbe sont $\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$**
2. **Si a > 0 , alors la courbe est ouverte vers le haut**  **et en ce moment la courbe a une valeur minimale qui est égale à $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$**
3. **Si a < 0 , alors la courbe est ouverte vers le bas**  **et en ce moment la courbe a une valeur maximale qui est égale à $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$**
4. **La courbe de la fonction est symétrique par rapport à la droite verticale passant par le sommet et l'équation de l'axe de symétrie est $x = \frac{-b}{2a}$**

Exemple 4

Représente graphiquement la fonction du second degré :

f telle que $f(x) = - x^2$ où $x \in \mathbb{R}$ en prenant $x \in [- 3, 3]$



Solution

On répète les mêmes étapes suivantes :

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y = f(x)	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Du graphique on remarque que :

1. La courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe de symétrie a pour équation $x = 0$
2. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (0 , 0) et la valeur maximale de la fonction = 0

Exercices 1-4

(1) **Complète ce qui suit :**

1. La fonction affine définie par $y = 2x - 1$, est représentée graphiquement par une droite qui coupe l'axe des ordonnées au point ....
2. La fonction affine définie par $y = 3x + 6$, est représentée graphiquement par une droite qui coupe l'axe des abscisses au point ....
3. Si le point (a, 3) est situé sur la droite représentant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 4x - 5$ alors a est égal à ....

(2) 1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, détermine le degré de la fonction puis calcule $f(-2)$, $f(0)$ et $f(\frac{1}{2})$ dans chacun des cas suivants :

A $f(x) = 3$ B $f(x) = 3 - 2x$ C $f(x) = x^2 - 4$

2. Représente graphiquement chacune des fonctions affines suivantes, puis détermine les points d'intersection de la droite qui les représente avec les deux axes du repère :

A $f(x) = 2x$ B $f(x) = -\frac{1}{2}x$ C $f(x) = 2x + 1$
D $f(x) = 2 - x$ E $f(x) = 3x - 1$ F $f(x) = -2x + 3$

3. Représente graphiquement chacune des fonctions suivantes. Du graphique, détermine le sommet de chaque courbe, l'équation de son axe de symétrie et la valeur maximale ou minimale.

A $f(x) = x^2 - 2$ en prenant $x \in [-3, 3]$ B $f(x) = (x - 2)^2$ en prenant $x \in [-1, 5]$
C $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en prenant $x \in [-4, 2]$ D $f(x) = 2 - x^2$ en prenant $x \in [-3, 3]$

En lien avec la technologie

L'utilisation des logiciels :

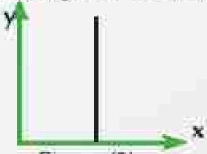
Il existe plusieurs logiciels gratuits permettant de tracer les courbes et de résoudre les équations. Parmi ces logiciels, on trouve sur l'internet le logiciel gratuit : Les mathématiques pour tous (Geogebra) dont l'adresse du site est http ://www.geogebra.org Ce programme peut être exécuté en langue arabe.

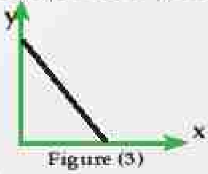
Utilise le logiciel Geogebra pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

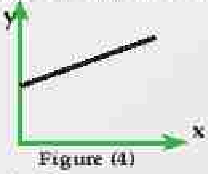
1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = 5 - 3x$
3. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
4. $f(x) = 4 - 3x - x^2$

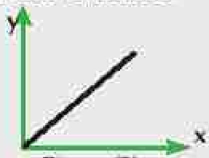
1. Pour le pavage et l'entretien du réseau routier, une entreprise encaisse une somme de 100000 Livres (charge financière constante), puis 30 Livres pour chaque mètre pavé. On suppose que x désigne en mètres la longueur de la route pavée et y désigne en Livres le coût total encaissé.


Figure (1)


Figure (2)


Figure (3)


Figure (4)


Figure (5)

(1) Le graphique qui représente la relation entre x et y est la figure ....

(2) Laquelle des relations suivantes représente les données précédentes ?

A $y = 30x$ **B** $y = 30x + 100000$ **C** $y = 100000x + 30$ **D** $y = 3000000x$

(3) Ecris, un article montrant l'effort fourni par l'État pour développer et entretenir les réseaux routiers pour que la circulation soit plus fluide et plus sécurisée, en montrant les devoirs des citoyens vers le respect des règlements de la circulation et l'entretien de la propreté des routes.

Epreuve de l'unité

1. Soient $X = \{0, 1, 4, 7\}$ et $Y = \{1, 3, 5, 6\}$. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que : «$a + b < 6$» pour tout $a \in X$ et $b \in Y$. Écris le graphe de R, puis représente-la par un diagramme sagittal et un diagramme cartésien. R est-elle une fonction ? Pourquoi ?

2. Représente graphiquement chacune des fonctions suivantes :

A $f(x) = 3x - 1$ **B** $f(x) = -2x$

C $f(x) = x^2 - 3$ en prenant $x \in [-3, 3]$ **D** $f(x) = 1 - 3x + x^2$ en prenant $x \in [-1, 4]$

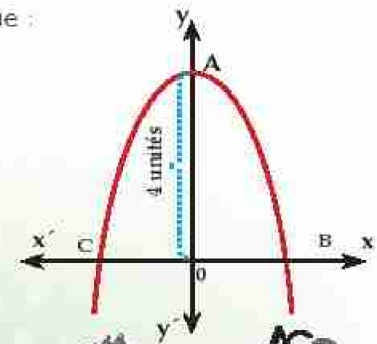
3. Pendant que Karim lisait son livre, il a observé qu'après 3 heures de lecture, il lui restait 50 pages à lire et après 6 heures de lecture, il lui restait 20 pages à lire. La relation entre le temps de la lecture (t) et le nombre de pages lues (n) est une relation affine.

A Représente la relation entre t et n graphiquement, puis trouve son expression algébrique.

B Combien de temps faut-il à Karim pour lire le livre en entier ?

C Quel est le nombre de pages qui restait à lire au moment où Karim a commencé à lire ?

4. **La figure ci-contre :** représente la courbe d'une fonction f telle que : $f(x) = m - x^2$ et Ao = 4 unités de longueur



Trouve :

A La valeur de m.

B Les coordonnées des points B et C.

C L'aire du triangle ayant pour sommets A , B et C.

Algèbre

Unité (2) : Rapport et proportion

Proportion directe et proportion inverse

Apprends :

Le poids d'un corps sur la lune est égal à $\frac{1}{6}$ de son poids sur la terre. Imagine que tu es en voyage sur la lune. Quel sera ton poids dans ce cas ?



2 - 1 Rapport



A apprendre :

- ☆ La notion du rapport
- ☆ Les propriétés d'un rapport

Expressions de base :

- ☆ Premier terme du rapport
- ☆ Deuxième terme du rapport
- ☆ Les deux termes du rapport.

Réfléchis et discute :

Nous avons déjà abordé le thème du rapport. On sait qu'un rapport est une comparaison entre deux quantités.



Par exemple : s'il y a 4 garçons et 3 filles, le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles peut s'écrire sous la forme 4 à 3 ou sous la forme $\frac{4}{3}$

D'une manière générale, si a et b sont deux nombres réels, alors le rapport entre le nombre a et le nombre b s'écrit sous l'une des formes

ou a : b ou $\frac{a}{b}$.

Dans ce cas, a est appelé le premier terme du rapport et b est appelé le deuxième terme du rapport et a et b ensemble sont appelés les deux termes du rapport.

Complète et réponds aux questions suivantes :

1. Un rapport change-il de valeur si on multiplie ses deux termes par un même nombre différent de zéro ?

$$\frac{3}{5} \overset{?}{=} \frac{3\times....}{5\times....}$$

2. Un rapport change-il de valeur si on ajoute un même nombre réel à ses deux termes ?

$$\frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{2+....}{3+....}$$

3. Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, est-ce que a = 3 et b = 5 sont les seuls valeurs possibles de a et b ?

Exemple :

Trouve le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes du rapport 7 : 11 pour obtenir 2 : 3.

Solution

Soit le nombre x.

$\therefore \frac{x+7}{x+11} = \frac{2}{3}$ $\qquad \therefore 3(x+7) = 2(x+11)$

$\therefore 3x + 21 = 2x + 22$ $\qquad \therefore 3x - 2x = 22 - 21$

$\therefore x = 1$

Pour t'entraîner :

Si on ajoute le carré d'un nombre positif aux deux termes du rapport 5 : 11, on obtient 3 : 5. Trouve ce nombre.

Exercices (2-1)

1. Deux nombres entiers sont dans le rapport 3 : 7. Si on retranche 5 de chacun d'eux, on obtient deux nombres dans le rapport 1 : 3. Trouve les deux nombres de départ.

2. Deux nombres entiers sont dans le rapport 2 : 3. Si on ajoute 7 au premier nombre et si on retranche 12 du deuxième nombre, on obtient deux nombres dans le rapport 5 : 3. Trouve les deux nombres de départ.

3. ***Si*** on retranche le triple d'un nombre aux deux termes du rapport $\frac{49}{69}$, on obtient $\frac{2}{3}$. **Trouve ce nombre.**

4. ***Si*** on ajoute le carré d'un nombre aux deux termes du rapport 7 : 11, on obtient 4 : 5. Trouve ce nombre.

2 - 2 Proportion



A apprendre :

- ☆ La notion de proportion
- ☆ Les propriétés d'une proportion
- ☆ La proportion en chaîne

Expressions de base :

- ☆ Proportion
- ☆ Première proportionnelle
- ☆ Deuxième proportionnelle
- ☆ Troisième proportionnelle
- ☆ Quatrième proportionnelle
- ☆ Extrêmes d'une proportion
- ☆ Moyens d'une proportion

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on dit que a , b , c et d sont quatre quantités proportionnelles

et si a, b, c et d sont quatre quantités proportionnelles, **alors** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Définition :

Une proportion est une égalité entre deux ou plusieurs rapports.

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a est appelé **la première proportionnelle**, *b* est appelé **la deuxième proportionnelle**, *c* est appelé **la troisième proportionnelle**, et *d* est appelé **la quatrième proportionnelle**. a et d sont appelés les extrêmes de la proportion et b et c sont appelés les moyens de la proportion.

Propriétés d'une proportion

(1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *, alors :*

1. a = m c et b = m d où **m** $\in \mathbb{R}^*$
2. a d = b c **(le produit des moyens = le produit des extrême)**
3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Vérifie les propriétés précédentes à l'aide d'exemples numériques de ton choix.

(2) Si ad = bc *, alors* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Vérifie les propriétés à l'aide de l'exemple numérique suivant :

Tu sais que 4 × 8 = 2 × 16

Alors : $\frac{4}{2} = \frac{....}{....}$, $\frac{4}{16} = \frac{....}{....}$

Exemple 1

Si $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, trouve la valeur de $\frac{3x+2y}{6y-x}$

Solution

Soit $x = 2m$, $y = 3m$ (où m est une constante $\neq$ zéro)

$$\therefore \frac{3x+2y}{6y-x} = \frac{3\times 2m + 2\times 3m}{6\times 3m - 2m} = \frac{12m}{16m} = \frac{3}{4}$$

Autre Solution

Diviser le numérateur et le dénominateur par y, puis remplacer $\frac{x}{y}$ par $\frac{2}{3}$

$$\therefore \text{L'expression} = \frac{3\times\frac{x}{y}+2}{6-\frac{x}{y}} = \frac{3\times\frac{2}{3}+2}{6-\frac{2}{3}}$$ → ***Complète :*** $= \frac{\dots}{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$

Exemple 2

Trouve la quatrième proportionnelle des nombres 4 , 12 et 16.

Solution

Soit x la quatrième proportionnelle

$$\frac{4}{12} = \frac{16}{x}$$

$\therefore 4 \times x = 12 \times 16$ ***[le produit des moyens = le produit des extrêmes]***

$\therefore x = \frac{12\times 16}{4} = 48$ $\therefore$ la quatrième proportionnelle = 48

Exemple 3

Trouve le nombre qu'il faut ajouter à chacun des nombres 3 , 5 , 8 et 12 pour que les résultats soient proportionnels.

Solution

Soit x le nombre. En ajoutant x, les nombres $3 + x$, $5 + x$, $8 + x$ et $12 + x$ **sont proportionnels.**

$\therefore \frac{3+x}{5+x} = \frac{8+x}{12+x}$ $\therefore (5+x)(8+x) = (3+x)(12+x)$

$\therefore 40 + 13x + x^2 = 36 + 15x + x^2$ $\therefore 15x - 13x = 40 - 36$

$\therefore 2x = 4$ $\therefore x = 2$

Pour t'entrainer :

1 **A** Trouver la deuxième proportionnelle des nombres 2, ... , 4, 6

B Trouver la troisième proportionnelle des nombres 8, 6, ... , 12

2 Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, trouve la valeur de $(7a + 9b) : (4a + 2b)$

3 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$, $m_1, m_2, m_3, ... \in R^*$,

alors : $\frac{a\,m_1 + c\,m_2 + e\,m_3 + ...}{b\,m_1 + d\,m_2 + f\,m_3 + ...}$ = l'un de ces rapports

Par exemple, soit $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, En multipliant les deux termes du premier rapport par 2, les deux termes du deuxième rapport par -5 et les deux termes du troisième rapport par 3, on a :

$\frac{2a - 5b + 3c}{2 \times 2 - 3 \times 5 + 3 \times 4}$ = l'un de ces rapports

D'où $2a - 5b + 3c$ = l'un de ces rapports

Exemple 4

Si a, b, c et d sont quatre quantités proportionnelles, ***démontre que :*** $\frac{3a - 2c}{5a + 3c} = \frac{3b - 2d}{5b + 3d}$

Solution

$\because$ a , b , c et d sont quatre quantités proportionnelles $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En multipliant les deux termes du premier rapport par 5 et les deux termes du deuxième rapport par 3, on a : "La somme des premiers termes des rapports : La somme des deuxièmes termes des rapports" = l'un de ces rapports.

$\therefore \frac{5a + 3c}{5b + 3d}$ = l'un de ces rapports **(1)**

En multipliant les deux termes du premier rapport par 3 et les deux termes du deuxième rapport par -2, on a : " La somme des premiers termes des rapports : La somme des deuxièmes termes des rapports" = l'un de ces rapports .

$\therefore \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ = l'un de ces rapports **(2)**

De (1), (2) $\therefore \frac{5a + 3c}{5b + 3d} = \frac{3a - 2c}{3b - 2d}$ $\therefore \frac{3a - 2c}{5a + 3c} = \frac{3b - 2d}{5b + 3d}$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

Autre Solution

Soit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ où m est une constante $\neq 0$,

$a = bm$, $c = dm$ En substituant dans les deux membres, on obtient le résultat.

Pour t'entraîner :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ***démontre que*** :

1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ **2)** $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Indication: Suppose que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ où m est une constante $\neq 0$, puis complète ou utilise une autre méthode.

Proportion en chaîne :

2, 6 et 18 sont trois nombres. Compare les rapports $\frac{2}{6}, \frac{6}{18}$

1. Y a-il une relation entre $(6)^2$ et 2×18 ?
2. Si on remplace le nombre 6 par le nombre (-6) dans les rapports, y a-il une relation entre $(-6)^2$ et 2×18 ?

Définition :

On dit que les quantités a, b et c sont proportionnelles en chaîne si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ Dans ce cas, a est appelée la première proportionnelle, b est appelée la moyenne proportionnelle et c est appelée la troisième proportionnelle où :

$$b^2 = ac \text{ ou } b = \pm\sqrt{ac}$$

Exemple 5

Trouve la moyenne proportionnelle entre 3 et 27.

Solution

La moyenne proportionnelle $= \pm\sqrt{3\times 27} = \pm 9$

Exemple 6

Si b est une moyenne proportionnelle entre a et c, démontre que : $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$

Solution

b est une moyenne proportionnelle entre a et c $\therefore$ a , b et c sont proportionnelles en chaîne

Soit $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = m$ $\therefore$ $b = c\,m$ et $a = b\,m = c\,m \times m = c\,m^2$

Membre de gauche $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2 m^4 + c^2 m^2}{c^2 m^2 + c^2}$

$= \frac{c^2 m^2 (m^2+1)}{c^2 (m^2+1)} = m^2$ **(1)**

Membre de droite $= \frac{a}{c} = \frac{c\,m^2}{c} = m^2$ **(2)**

De **(1)**, **(2)**, on obtient $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$

Autre Solution

Soit : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = m$ $\therefore$ $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = m^2$

Des deux premiers rapports $m^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ = Membre de gauche

et $m^2 = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ = Membre de droite

De **(1) et (2)** $\therefore$ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$

Pour t'entraîner :

Si a , b , c et d sont proportionnelles en chaîne, démontre que : $\frac{a-2b}{b-2c} = \frac{3b+4c}{3c+4d}$

Indication : Soit $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = m$

$\therefore$ $c = dm$, $b = dm^2$, $a = dm^3$. Complète la solution

Exercices (2-2)

1 **Si x, y, z et ℓ sont des quantités proportionnelles, démontre que**

A $\left(\frac{x+y}{z+\ell}\right)^2 = \frac{2x^2-3y^2}{2z^2-3\ell^2}$ B $\sqrt[3]{\frac{5x^3-3z^3}{5y^3-3\ell^3}} = \frac{x+z}{y+\ell}$

2 **Si** $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, ***démontre que :***

A $\frac{2y-z}{3x-2y+z} = \frac{1}{2}$ B $\sqrt{3x^2+3y^2+z^2} = 2x + y$

3 **Si** a , b , c et d sont des quantités proportionnelles, ***démontre que :***

A $\frac{ac}{bd} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^2$ B $\sqrt[3]{\frac{5a^3-3c^3}{5b^3-3d^3}} = \frac{a+c}{b+d}$

4 **Si** b est une moyenne proportionnelle de a et c , démontre que :

A $\frac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}} = b^2$ B $\frac{2c^2-3b^2}{2b^2-3a^2} = \frac{c}{a} = \frac{c^2}{b^2}$

5 **Si** a , b , c et d sont des quantités proportionnelles en chaîne, ***démontre que :***

A $\frac{ab-cd}{b^2-c^2} = \frac{a-c}{b}$ B $\frac{a^2-3c^2}{b^2-3d^2} = \frac{b}{d}$

C $\frac{a}{b+d} = \frac{c^3}{c^2d+d^3}$ D $\frac{c^2-d^2}{a-c} = \frac{bd}{a}$

6 **Si** : 5a , 6b , 7c et 8d sont des quantités positives proportionnelles en chaîne,

démontre que :

$$\sqrt[3]{\frac{5a}{8d}} = \sqrt{\frac{5a+6b}{7c+8d}}$$

7 **Si** $\frac{y}{x-z} = \frac{x}{y} = \frac{x+y}{z}$ **démontre que chacun de ces rapports est égal à** 2 (au cas où $x+y \neq 0$),

puis trouve x : y : z

8 **Si** $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{2a-b+5c}{3x}$, ***trouve*** la valeur de x

9 **Si** a **: b : c = 5 : 7 : 3 et a + b = 27,6,** ***trouve*** **la valeur de a, b et c**



2 - 3 Variation directe et variation inverse

A apprendre :

- ☆ La notion de variation directe
- ☆ La notion de variation inverse
- ☆ Comment distinguer la variation directe de la variation inverse

Expressions de base :

- ☆ variation
- ☆ variation directe
- ☆ variation inverse

(1) Variation directe

Réfléchis et discute (1) :



Une voiture se déplace à une vitesse constante v de 15 m/s. La distance d en mètres qu'elle parcourt en un temps t en secondes est donnée par la formule d = v t.

t	1	2	3	4
d	15	30	45	60

A Représente cette relation entre d et t graphiquement.

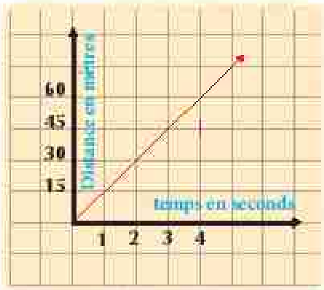
B Est-ce que la représentation graphique passe par le point d'origine (0, 0) ?

C Calcule $\frac{d}{t}$ dans chaque cas. Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on remarque que :

$\frac{d}{t}$ est constant et est égal à 15. Donc d = 15 t

Dans ce cas on dit que d est directement proportionnelle à t et on note d ∝ t.



Définition :

On dit que y est directement proportionnel à x et on le note y ∝ x ou y = k x (où k est une constante ≠ 0). Si x prends les deux valeurs x_1 et x_2 et si y prends les deux valeurs correspondantes y_1 et y_2 respectivement, alors $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation précédente est une relation linéaire entre les deux variables x et y. Elle est représentée graphiquement par une droite qui passe par le point d'origine.

2. Si $y \propto x$, alors $y = k\,x$
   et si $y = k\,x$, alors $y \propto x$.

Exemple 1

Si $y \propto x$ et $y = 14$ pour $x = 42$, ***trouve*** :

a) la relation ente y **et** x. **b)** la valeur de y pour $x = 60$.

Solution

a) $\because y \propto x$ $\therefore y = k\,x$ (où k est une constante $\neq 0$)

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans cette relation :

$\therefore 14 = 42 \times m$ $\therefore k = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ La relation est : $y = \frac{1}{3}\,x$

b) Pour $x = 60$ $\therefore y = \frac{1}{3} \times 60 = 20$

Remarque : On peut utiliser la relation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$ pour trouver la valeur de y dans la deuxième partie de la question.

(2) Variation inverse

Soient A l'aire d'un rectangle et x et y ses dimensions.

A ***Ecris*** la relation entre A , x et y.

B Si l'aire du rectangle est constante et est égale à 33 cm^2, ***complète*** le tableau suivant :

x	3	5	6	10
y	....	....	....	....

C ***Calcule*** $x\,y$ dans chaque cas. Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on remarque que :

$x\,y = 30$ ***et donc*** $y = \frac{30}{x}$ ***d'où*** y est inversement proportionnel à x et on note $y \propto \frac{1}{x}$

De même, $x = \frac{30}{y}$ ***d'où*** x est inversement proportionnel à y et on note $x \propto \frac{1}{y}$

Définition :

On dit que y est inversement proportionnel à x et on le note $y \propto \frac{1}{x}$ si $x\,y = k$ (où k est une constante $\neq 0$). Si x prends les deux valeurs x_1 et x_2 et si y prends les deux valeurs correspondantes y_1 et y_2 respectivement, alors : $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$

De ce qui précède, on déduit que :

1. La relation précédente n'est pas une relation linéaire entre les deux variables x et y. Elle n'est pas représentée graphiquement par une droite

2. Si y est inversement proportionnel à x, ***alors,*** $y = \frac{k}{x}$ (où k est une constante $\neq 0$)

   si $y = \frac{k}{x}$, alors $y \propto \frac{1}{x}$

Exemple 2

Si $y \propto \frac{1}{x}$ et $y = 3$ pour $x = 2$, trouver :

a) la relation entre x et y. **b)** la valeur de y pour $x = 1,5$.

Solution

$\because y \propto \frac{1}{x}$ $\therefore y = \frac{k}{x}$ (où k est une constante $\neq 0$)

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans cette relation :

$\therefore 3 = \frac{k}{2}$ $\therefore k = 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ La relation est : $y = \frac{6}{x}$

b) Pour $x = 1,5$ $\therefore y = \frac{6}{1,5} = 4$

Remarque : On peut utiliser la relation $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ pour trouver la valeur de y

Pour t'entraîner :

Lesquels **des tableaux suivants représentent une variation directe et lesquels représentent une variation inverse ? Justifie la réponse dans chaque cas :**

x	y
3	20
5	12
4	15
6	10

x	y
2	9
4	18
12	54
16	72

x	y
5	9
10	18
15	27
25	45

x	y
3	6
-2	-9
-18	1
9	-2

Exemple 3

En lien avec la Physique : La relation entre la vitesse v (m/s) et le temps t (s) est donnée par la formule $v = 9,8\ t$

1) ***Détermine*** la nature de la variation entre v et t

2) **A** ***Trouve*** les valeurs de v pour $t = 2$ seconds et pour $t = 4$ seconds.

B ***Trouve*** la valeur de t pour $v = 24,5$ m/s

Solution

1) $\because v = \text{constante} \times t$ ***Donc*** $v \propto t$ ***d'où*** v est directement proportionnelle à **t**

2): **A** pour $t = 2$ $\quad v = 9,8 \times 2 = 19,6$ m/s

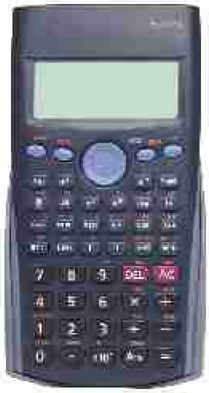
pour $t = 4$ $\quad v = 9,8 \times 4 = 39,2$ m/s

B pour $V = 24,5$ $\quad 24,5 = 9,8 \times t$ $\quad \therefore t = \frac{24,5}{9,8} = 2,5$ seconds.

Exemple 4

En lien avec la géométrie : La hauteur h d'un cylindre circulaire droit (de volume constant) est inversement proportionnelle au carré du rayon de sa base (r). Si $h = 27$ cm pour $r = 10,5$ cm, trouve h pour $r = 15,75$ cm.

Solution :



$\because h \propto \frac{1}{r^2}$ $\therefore h = k \times \frac{1}{r^2}$ (où k est une constante $\neq 0$)

$h = 27$ pour $r = 10,5$

$\therefore 27 = k \times \frac{1}{(10,5)^2}$ $\therefore k = 27 \times (10,5)^2$ **(1)**

En substituant : $\therefore h = 27 \times (10,5)^2 \times \frac{1}{r^2}$ de **(1)**

Pour r = 15,75 cm $\therefore h = 27 \times (10,5)^2 \times \frac{1}{(15,75)^2} = 12$ cm

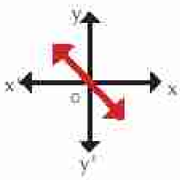
Nous pouvons utiliser une calculatrice pour trouver le dernier résultat comme suit :

27 | × | **10,5** | x^2 | ÷ | **10,75** | x^2 | =

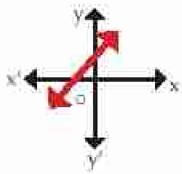
Exercises (2-3)

(1) *Choisis* **la bonne réponse parmi les réponses proposées :**

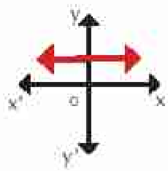
1 **Lesquels des graphiques suivants représentent une variation directe entre x et y ?**



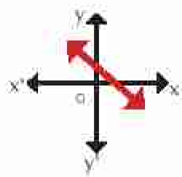
A



B



C



D

2 **La relation qui représente une variation directe entre x et y est:**

A $xy = 5$ B $y = x + 3$ C $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$ D $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$

3 **Si y est inversement proportionnel à x et si $x = \sqrt{3}$, pour $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, alors la constante de la proportion est égale à :**

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C 2 D 6

(2) (Calcul mental) : Du tableau de données suivant, réponds aux questions suivantes :

x	2	4	6
y	6	3	2

A Montre la nature de la variation entre y et x. B Calcule le constant de la proportion.

C Trouve la valeur de y pour x = 3 D Trouve la valeur de x pour $y = 2\frac{2}{5}$

Exercices généraux de l'unité

1. **Si le coût total (y) d'un voyage est composée d'une somme fixe (a) et d'une somme qui est directement proportionnelle au nombre de voyageurs (x), choisis la bonne réponse :**

   A) $y = a\,x$
   B) $y = \frac{a}{x}$
   C) $y = a + \frac{K}{x}$ (k est une constante ≠ 0)
   D) $y = a + k\,x$ (k est une constante ≠ 0)

2. **Si $y \propto x$ et si $y = 40$ pour $x = 14$, *trouve* la valeur de x pour $y = 80$.**

3. **Une voiture roule à une vitesse constante de sorte que la distance parcourue soit directement proportionnelle au temps. Si la voiture parcourt une distance de 150 kilomètres en 6 heures, combien de kilomètres parcourt-elle en 10 heures ?**

4. **Le poids (p) d'un corps sur la lune est directement proportionnel à son poids (r) sur la terre. Un corps qui pèse 84 kilogrammes sur la terre pèse 14 kilogrammes sur la lune. Quel est le poids d'un corps sur la lune si son poids sur la terre est 144 kilogrammes ?**

5. **Si y est inversement proportionnel à x et si $y = 2$ pour $x = 4$, trouve la valeur de y pour $x = 16$**

6. **Si a, b, c et d sont proportionnels en chaîne, démontre que :**

   A) $\frac{a^2 - 3c^2}{b^2 - 3d^2} = \frac{b}{d}$
   B) $\frac{2a + 3d}{3a - 4d} = \frac{2a^3 + 3b^3}{3a^3 - 4b^3}$

7. **Si** $\frac{x}{2a + b} = \frac{y}{2b - c} = \frac{z}{2c - a}$, ***démontre que*** $\frac{2x + y}{4a + 4b - c} = \frac{2x + 2y + z}{3a + 6b}$

8. ***En lien avec la géométrie :*** x, y et z sont les longueurs proportionnelles de trois côtés d'un triangle telles que $x + y = 15$ cm et $y + z = 22{,}5$ cm. ***Trouve*** $x : y$.

9. ***Application de la vie quotidienne :*** Pour le développement de la campagne égyptienne, l'état a consacré une somme de $1{,}85 \times 10^6$ Livres pour construire une école, un centre médical et un centre de jeunesse dans un village. Le coût d'une école est $\frac{3}{2}$ du coût d'un centre médical et le coût d'un centre médical est $\frac{5}{6}$ du coût d'un centre de jeunesse. Quel est le coût de chaque projet ?

10. ***Application de la vie quotidienne :*** Le nombre d'heures (n) consacré à faire un travail est inversement proportionnel au nombre d'ouvriers (x) qui font ce travail. Si on a besoin de 6 ouvriers pour faire le travail en quatre heures, quel est le temps nécessaire pour faire le travail par 8 ouvriers ?

Activité

1 *(Calcul mental)* A partir des données dans le tableau suivant, réponds aux questions suivantes :

x	3	8	6	12
y	8	3	4	2

A *Montre* en justifiant que x et inversement proportionnel à y.

B *Trouve* la valeur de la constante.

C *Ecris* la relation entre x et y.

D *Trouve* y pour x = 48.

E *Trouve* x pour y = 12.

2 Le pourcentage de réussite à l'examen de troisième préparatoire dans l'un des gouvernorats est 83 %. Le pourcentage de réussite des garçons est 79 % et le pourcentage de réussite des filles est 89 %. *Calcule* le pourcentage de réussite entre le nombre de garçons et le nombre de filles dans ce gouvernorat.

Epreuve de l'unité

1 Si $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{6} = \frac{c+a}{5}$, *démontre que* $\frac{a+b+c}{a} = 7$.

2 Si $y = a - 9$, $y \propto \frac{1}{x^2}$ et si $a = 18$ pour $x = \frac{2}{3}$, *trouve* la relation entre x et y, *puis déduis* la valeur de y pour x = 1.

3 Si $\frac{21x - y}{7x - z} = \frac{y}{z}$, *démontre que* $y \propto z$.

4 Si $x^4 y^2 - 14 x^2 y + 49 = 0$, *démontre que* $y \propto \frac{1}{x^2}$.

5 *En lien avec l'astronomie :* Le poids (p) d'un corps sur la terre est directement proportionnel à son poids (r) sur la lune, Si $P_1 = 182$ kg, $r_1 = 35$ kg, *trouve* r_2 pour $p_2 = 312$ kg.

6 *En lien avec la physique :* La vitesse v de la sortie de l'eau d'un tuyau est inversement proportionnelle au carré de la longueur du rayon r du cratère du tuyau, Si v = 5 cm /s pour r = 3 cm. trouve v pou r = 2,5 cm.

Statistique

Unité 3: Statistique



Un restaurant présente des glaces de différentes sortes. Le propriétaire du restaurant a fait un sondage sur les sortes de glaces préférées par les consommateurs.

Etudier la statistique te permettra de choisir un échantillon qui représente la population des consommateurs.

3 - 1

Recueils de données



A apprendre

- ☆ Types de sources de recueil des données
- ☆ Méthodes de recueil des données
- ☆ Comment choisir un échantillon
- ☆ Types d'échantillons

Expressions de base

- ☆ ressources primaires
- ☆ ressources secondaires
- ☆ méthode du dénombrement complet
- ☆ méthode d'échantillons
- ☆ sélection biaisée
- ☆ sélection aléatoire
- ☆ échantillon
- ☆ échantillon aléatoire
- ☆ échantillon stratifié

Réfléchis et discute

La méthode choisie pour recueillir des données est l'une des étapes les plus importantes sur laquelle se base une recherche statistique. Le recueil des données suivant des méthodes scientifiques adaptées en faisant les inférences statistiques, permet d'obtenir des résultats fiables et de prendre des décisions convenables.

1. Quelles sont les sources de recueil des données ?
2. Comment déterminer la méthode de recueil des données ?

Sources de recueil des données

1 *Sources de recueil des données (sources du terrain) :*

Ce sont les sources qui permettent d'obtenir les données d'une manière directe où les données par interviews, par sondages d'opinion. Ces types de ressources offre des informations précises mais il demande du temps et de l'effort en plus du coût sur le plan financier.

2 *Ressources secondaires (historiques) :*

Ce sont les ressources qu'on peut obtenir des agences et des organismes officiels comme les décrets de l'Agence centrale pour la mobilisation publique et de la statistique, l'internet et les médias.



Ce type de ressources permet d'économiser le temps, l'effort et l'argent.

Méthode du recueil des données



La méthode du recueil des données est déterminée selon l'objectif et la population statistique en cause. On appelle population statistique un ensemble d'éléments soumis à une étude statistique, ayant des propriétés caractarestiques communes.

Par exemple : Les élèves d'une école donnée représentent une population statistique dont les éléments sont les élèves.

[1] *:Méthode du dénombrement complet :*



Dans cette méthode, on collecte les données concernant le phénomène en cours d'étude de tous les éléments de la population statistique. Cette méthode est utilisée pour dénombrer tous les éléments d'une population comme pour recensement de la population par exemple.

Cette méthode se caractérise par la globalisation l'impartialité et l'exactitude.

La méthode de dénombrement complet a pour inconvénients la longueur du temps, l'effort et le coût très élevé.

[2]: *Méthode des échantillons :*

Cette méthode est basée sur le choix d'un échantillon d'une population statistique qui la représente puis de faire une recherche sur cet échantillon. Les résultats obtenus sont généralisés sur la population entière.

Avantages de la méthode d'échantillons :

1. Economie du temps, de l'effort et du coût.
2. C'est le seul moyen pour recueillir des données dans les populations surpeuplées (comme dans le milieu des poissons).
3. C'est le seul moyen pour étudier des populations limitées comme:



A l'examen du sang d'un patient à travers un échantillon (l'examen du sang en entier peut conduire à la mort du patient).

B l'examen de la production d'une usine qui fabrique des lampes à travers un échantillon pour déterminer l'âge moyen d'une lampe . (déterminer l'âge moyen d'une lampe nécessite l'allumage de la lampe jusqu'à ce qu'elle grille).

Parmi les inconvénients de la méthode d'échantillons on trouve l'imprécision des résultats au cas où l'échantillon choisi ne représente pas parfaitement la population. Dans ce cas, on appelle cet échantillon **l'échantillon non-aligné**.

Comment choisir les échantillons, les conditions d'admissibilité d'un échantillon :

[1]: Le choix non-aligné (les échantillons non aléatoires)



C'est le choix d'un échantillon par une méthode adaptée aux objectifs de la recherche et dans ce cas, il est appelé « échantillon ciblé ». Par exemple, pour étudier le degré d'acquisition des élèves d'une notion mathématique donnée, on doit analyser les résultats d'un examen fait par des élèves ayant déjà étudié la même notion. Ce choix de l'échantillon n'est pas considéré comme un choix aléatoire.

[2]: Le choix aléatoire (les échantillons aléatoires)

C'est le choix d'un échantillon de sorte que tous les éléments de la population aient la même chance d'apparaître.

Parmi les échantillons aléatoires les plus importants, on trouve :

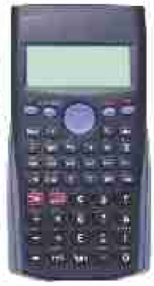
1. l'échantillon aléatoire simple :
   C'est le plus simple des échantillons. On le choisit d'une population homogène. Le choix de l'échantillon dépend de la grandeur et du nombre d'unités de la population.

A **Dans une petite population :**



Pour choisir cinq élèves d'une classe de 40 élèves, on peut préparer une carte, pour chaque élève, qui contient son nom (ou son numéro d'ordre) de sorte que toutes les cartes soient identiques puis on met les cartes dans une boîte. Ensuite, on tire au hasard une carte de la boîte avec remise puis on répète le tirage jusqu`à ce qu' on tire l'échantillon voulu.

B Dans une grande population :



Pour choisir cinq élèves d'une école de 800 élèves, le choix à travers les cartes est une méthode difficile. Dans ce cas, on numérote les noms des élèves de 1 à 800 puis on utilise une calculatrice pour (ou un programme Excel) pour produire des numéros au hasard entre 0,000 et 0, 999. En négligeant la virgule, on obtient des nombres entre 0 et 999. Dans ce cas, on élimine les nombres apparaissant qui dépassent 800 comme suit :



En répétant l'appui sur la touche  les nombres apparaissent successivement. Dans ce cas., on se contente de cinq numéros différents et convenables.

2 l'échantillon aléatoire stratifié :

Si la population en cours d'étude n'est pas homogène et donc elle est composée de groupes qualitatifs de caractéristiques différentes, on classe cette population en groupes homogène selon leurs caractéristiques. Chaque groupe est appelé une classe. Le chercheur choisit un échantillon représentant chaque classe selon sa grandeur dans la population. Cet échantillon est appelé « échantillon stratifié »..



Exemple : Pour étudier le niveau d'enseignement d'une population composée de 400 personnes dans laquelle le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles est 3 : 2 et pour choisir un échantillon de 50 personnes, on doit choisir 30 personnes de la classe des garçons et 20 personnes de la classe des filles.

Exercices (3-1)

1. ***Compare*** **la méthode du dénombrement complet et la méthode des échantillons en montrant les avantages est les inconvénients de chaque méthode .**

2. **La direction d'un Hôtel veut savoir l'opinion, de 300 résidents, sur le niveau des services présentés par l'Hôtel. Elle a attribuée un numéro entre 201 et 500 à chaque résident puis elle a choisi un échantillon de 10 % des résidents pour les questionner. A l'aide de ta calculatrice, détermine les numéros des résidents ciblés dans l'échantillon.**

3. **Dans l'une des facultés, il y a 4000 étudiants inscrits en première année, 3000 étudiants inscrits en deuxième année, 2000 étudiants inscrits en troisième année et 1000 étudiants inscrits en quatrième année. On veut prendre un échantillon de 500 étudiants pour représenter toutes les classes selon leurs grandeurs. Calcule le nombre d'étudiants de chaque classe dans l'échantillon.**

Dispersion

3 - 2

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié les mesures de la tendance centrale (moyenne arithmétique – médiane – mode). Tu as pu également calculer pour un ensemble de données une valeur qui décrit la tendance de ces données à se centraliser autour de cette valeur.



Si les salaires hebdomadaires, en Livres égyptiennes, de deux groupes d'ouvriers A et B d'une usine sont comme suit :

Groupe A: 170, 180, 180, 230, 240

Groupe B: 50, 180, 180, 190, 400

1. *Calcule* la moyenne arithmétique des salaires pour chacun des deux groupes A et B.
2. *Compare* les salaires des deux groupes A et B. **Que peux-tu conclure ?**

On sait que :

La moyenne arithmétique = $\dfrac{\text{la somme de toutes les valeurs d'une série}}{\text{le nombre de valeurs de la série}}$

Donc :

la moyenne arithmétique des salaires pour le groupe A =

$$\frac{170+180+180+230+240}{5} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ Livres}$$

la moyenne arithmétique des salaires pour le groupe B =

$$\frac{50+180+180+190+400}{5} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ Livres}$$

Pour comparer les salaires des deux groupes A et B, on trouve que :

1. La moyenne arithmétique des salaires dans le groupe A = La moyenne arithmétique des salaires dans le groupe B = 200 Livres
2. Le salaire médian = le salaire modal = 180 Livres pour chacun des deux groupes A et B.



A apprendre

☆ Mesures de la dispersion (étendu – écart-type)

Expressions de base

☆ tendance centrale
☆ moyenne arithmétique
☆ dispersion
☆ étendu
☆ écart-type

On remarque que :

(1) Les deux ensembles de salaires sont différents mais ils ont la même tendance centrale.

(2) Les salaires dans le groupe A sont de valeurs proches. Ils sont compris entre 170 et 240 Livres tandis que les salaires dans le groupe B sont de valeurs éloignées. Ils sont compris entre 50 et 400 Livres.

Donc, **les salaires des ouvriers du groupe B sont plus dispersés que les salaires des ouvriers du groupe A.**

Pour cela, pour faire une comparaison entre deux groupes, on doit prendre en compte la dispersion des valeurs de chacun d'eux et l'éloignement des uns par rapport aux autres.

La dispersion : **pour un ensemble de valeurs signifie l'éloignement ou la différence entre ses éléments. La dispersion est petite lorsque la différence entre les éléments est moindre mais la dispersion est grande lorsque la différence entre les éléments est grande (c'est-à-dire si la différence entre les valeurs est grande). La dispersion est nulle lorsque les éléments sont égaux.**

Donc, la dispersion est une mesure qui exprime le degré d'homogénéité d'éléments.

De ce qui précède, on déduit que :

Pour comparer deux ou plusieurs ensembles de données, il est nécessaire de déterminer une mesure de la tendance centrale et une autre mesure de la dispersion pour chaque ensemble.

Mesures de la dispersion :

1 *L' étendu : (C'est la plus simple mesure de la dispersion)*

C'est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur dans un ensemble de valeurs. En comparant les deux ensembles :

Ensemble A : 51, 53, 55, 57, 58, 60

Ensemble B : 42, 45, 47, 49, 52, 92

On trouve que L'étendu de le premier ensemble = 60 - 51 = 9

L'étendu de le deuxième ensemble = 92 - 42 = 50

Le résultat montre que les valeurs dans le deuxième ensemble sont plus dispersées que les valeurs dans le premier ensemble.

Remarque que :

(1) L'étendu est le moyen le plus simple et le plus facile pour mesurer la dispersion.

(2) Les valeurs extrêmes agissent sur le rang.

Il est claire que les éléments de l'ensemble B sont dispersés dans un rang de 50 mais si on exclue le dernier élément (92) de son ensemble, alors :

L'étendu = 52 - 42 = 10 ou $\frac{1}{5}$ de l'ètendu précédemment calculé.

(3) Dans la mesure où l'étendu ne dépend que de la plus grande valeur et la plus petite valeur, il peut ne pas donner une image fiable de la dispersion de l'ensemble.

2 L'écart-type :

C'est la mesure de la dispersion la plus connue et la plus précise (dans des conditions particulières). «C'est la racine carrée positive de la moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne arithmétique»

D'où :

$$\text{L'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$$

où σ (sigma) est l'écart-type pour ensemble de données.

$\overline{x}$ (x bar) est la moyenne arithmétique de l'ensemble de données.

n est le nombre d'éléments

$\sum$ symbolise la somme

(1) Calcul de l'écart-type pour un ensemble de valeurs :

Exemple

Calcule l'écart-type pour les valeurs 12, 13, 16, 18, 21

Solution

Pour calculer l'écart-type, on dresse le tableau ci-contre où la moyenne arithmétique

$$\overline{x} = \frac{\text{la somme de toutes les valeurs d'une série}}{\text{le nombre de valeurs de la série}}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{12 + 13 + 16 + 18 + 21}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\because \text{l'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$$

$$\therefore \text{l'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{54}{5}} = \sqrt{10,8} = \simeq 3,286$$

	x	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$
	12	12 - 16 = -4	16
	13	13 - 16 = -3	9
	16	16 - 16 = 0	zéro
	18	18 - 16 = 2	4
	21	21 - 16 = 5	25
Total	80		54

(2) *Calcul de l'écart-type pour une distribution par intervalles :*

Pour une distribution par intervalles, on a :

$$\text{l'écart-type } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2\, k}{\sum k}}$$

où : **x** représente la valeur ou le centre de l'ensemble ,

k représente la fréquence de la valeur ou de l'intervalle .

$\sum$ **k** représente la somme des fréquences , $\overline{x}$ représente la moyenne arithmétique $= \frac{\sum x\, k}{\sum K}$

Exemple

Le tableau des effectifs suivant, montre le nombre d'unités abîmées trouvées dans 100 boîtes contenant les unités fabriquées :

Nombre d'unités abîmées	zéro	1	2	3	4	5
Nombre de boîtes	3	16	17	25	20	19

Calcule l'écart-type pour les unités abîmées.

Solution

Soit le nombre d'unités abîmées **(x)** et le nombre de boîtes **(k)**

Pour calculer l'écart-type pour les unités abîmées, on dresse le tableau suivant :

la moyenne arithmétique $\overline{x}$

$$= \frac{\sum x \times k}{\sum k} = \frac{300}{100} = 3$$

l'écart-type σ

$$= \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2\, k}{\sum k}}$$

$$= \sqrt{\frac{204}{100}} \simeq 1{,}428 \text{ unités}$$

Nombre d'unités abîmées (x)	Nombre de boîtes (k)	$x \times k$	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$(x - \overline{x})^2 k$
zéro	3	zéro	-3	9	27
1	16	16	-2	4	64
2	17	34	-1	1	17
3	25	75	zéro	zéro	zéro
4	20	80	1	1	20
5	19	95	2	4	76
Total	100	300			204

Al Ahram Commercial Press ACP

Pour t'entraîner :

Le tableau des effectifs suivant, montre le nombre de buts marqués lors d'un nombre de matchs de football :

Nombre de buts	zéro	1	2	3	4	5	6
Nombre de Matchs	1	4	6	9	5	3	2



Calcule l'écart-type pour le nombre de buts.

Exemple

Le tableau des effectifs suivant, montre les notes de 40 élèves dans l'examen d'une matière :

Intervalles	zéro →	4 →	8 →	12 →	16 → 20	Total
Effectifs	2	5	8	15	10	40



Calcule l'écart-type pour cette distribution.

Solution

1. On calcule le centre des intervalles x

   Donc le centre du premier intervalle $= \frac{0+4}{2} = 2$

   Le centre du deuxième intervalle $= \frac{4+8}{2} = 6$

De la même manière, on calcule le centre des autres intervalles et on inscrit les résultats dans la troisième colonne

2. On multiplie les centres des intervalles par les effectifs correspondants $x \times k$ et on inscrit les résultats dans la quatrième colonne.

   On calcule la moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{\sum x\,k}{\sum k}$

3. On calcule l'écart du centre de chaque intervalle (x) à la moyenne arithmétique. Détermine $(x - \overline{x})$

4. On calcule le carré de l'écart des centres des intervalles à leurs moyennes arithmétiques $(x - \overline{x})^2$

5. On calcule le produit du carré de l'écart du centre de chaque intervalle à la moyenne arithmétique par l'effectif de l'intervalle $(x - \overline{x})^2 \times k$

6. On calcule l'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2\, k}{\sum k}}$

Intervalle	Effectif (k)	Centres des intervalles (x)	$x \times k$	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$(x - \overline{x})^2 k$
0 →	2	2	4	- 10,6	112,36	224,72
4→	5	6	30	- 6,6	43,56	217,80
8→	8	10	80	- 2,6	6,76	54,08
12→	15	14	210	1,4	1,96	29,40
16→20	10	18	180	5,4	29,16	291,60
Total	40		504			817,6

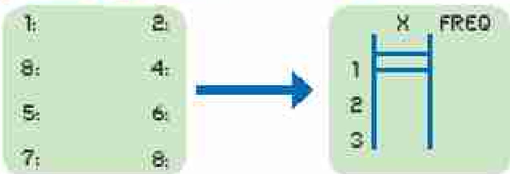
La moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{504}{40} = 12,6$

L'écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{817,6}{40}} = \sqrt{20,44} \simeq 4,52$ points

On peut utiliser une calculatrice [Fx-82ES, Fx-83ES, Fx-85ES, Fx-300ES, Fx-350ES] pour vérifier les calculs de l'écart-type.

a) Préparer la calculatrice pour le mode statistique et pour introduire les données

On Mode 2 (Stat) 1 (1−VAR)

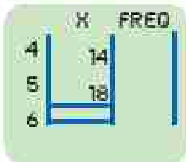


b) Calcul de l'écart-type pour une distribution (Exemple 2)

1 On introduit les centres des intervalles 2 , 6 , 10 , 14 et 18

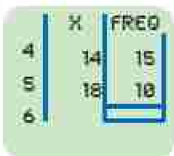
On Mode 2 (Stat) 1 (1−VAR)

2 = 6 = 1 0 = 1 4 = 1 8 =



2 On passe au début de la deuxième (FREQ), puis on introduit les effectifs correspondants aux intervalles 2 , 5 , 8 , 15 , 10.

▶ ▲ 2 = 5 = 8 = 1 5 = 1 0 =



3 On fait exécuter le résultat. C'est $\sigma \simeq 4,521$

Shift 1 5 (VAR) 3 (Xσn) = ▲



4 On retourne au mode initial, puis on éteint la calculatrice.

Remarque que :

(1) L'écart-type est influencé par les écarts de toutes les valeurs et par conséquent, sa valeur est influencée par les valeurs extrêmes.

(2) L'écart-type a la même unité de mesure que les données initiales. Pour cette raison, on l'utilise pour la comparaison entre les dispersions des intervalles ayant les mêmes unités de mesure lorsqu'ils ont la même moyenne arithmétique. Dans ce cas, l'intervalle ayant le plus grand écart-type est le plus dispersé.

Pour t'entraîner :

Les deux tableaux des effectifs suivants, représentent les distributions des notes des élèves des deux classes de troisième préparatoire A et B dans un examen :

Classe A

Intervalles des notes	0→	10→	20→	30→	40→50	Total
Nombre d'élèves	2	5	11	15	7	40

Classe B

Intervalles des notes	0→	10→	20→	30→	40→50	Total
Intervalles des notes	2	3	18	7	10	40

1. ***Représente*** dans un même graphique, chacune des deux distributions par un polygone des effectifs.
2. ***Calcule*** la moyenne arithmétique et l'écart-type pour chaque distribution.
3. Laquelle des deux classes est la plus harmonisée au niveau de l'acquisition ?

Exercices (3-2)

1. ***Calcule*** **l'écart-type pour chacune des données suivantes :**

   A 16, 32, 5, 20, 27 **B** 72, 53, 61, 70, 59

   C 15, -12, -9, 27, -6 **D** 22, 20, 20, 20, 18

2. **Si l'écart-type pour un ensemble de données est égal à zéro, que peux-tu déduire ?**
3. **Les deux tableaux des effectifs suivants, montrent le nombre d'élèves de certaines familles dans l'une des nouvelles villes :**

Nombre d'enfants	Zéro	1	2	3	4
Nombre de familles	8	16	50	20	6



Calcule **la moyenne arithmétique et l'écart-type pour le nombre d'enfants.**

4 **Les deux tableaux des effectifs suivants, montrent les poids de 200 élèves d'une école :**

Poids en kilogrammes	35→	45→	55→	65→	75→	Total
Nombre d'élèves	20	55	80	30	15	200

Calcule : **A** la moyenne arithmétique pour les poids des élèves.

B l'écart-type pour les poids des élèves.

Exercices généraux

1 **Cite un moyen convenable pour recueillir les données dans chaque cas :**

A Connaître la sorte de blé avant de l'acheter.

B Connaître le degré de salinité de l'eau de mer.

C Voir le degré de validité des bouteilles de gaz avant de les distribuer.

2 **On veut prendre un échantillon aléatoire stratifié dans lequel, chaque classe est représentée selon sa grandeur dans une population composée de 40000 éléments. L'échantillon est composé de trois niveaux comme le montre le tableau suivant :**

Nombre de niveaux	1	2	3
Nombres par niveau	12000	20000	8000

Si le nombre d'éléments du premier niveau de l'échantillon est 240, trouve la grandeur de l'échantillon entier.

3 *Calcule* **la moyenne arithmétique et l'écart-type :**

23, 12, 17, 13, 15, 16, 8, 9, 37, 10.

4 **Les deux tableaux des effectifs suivants, montrent les âges de 10 enfants :**

Âge en années	5	8	9	10	12	Total
Nombre d'enfants	1	2	3	3	1	10

Calcule **l'écart-type pour l'âge en années**

5 **Les deux tableaux des effectifs suivants, montrent les quantités d'essence consommées par un groupe de voitures**

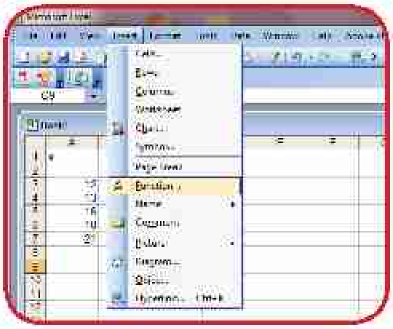
Nombre de kilomètres par litre	5-	7-	9-	11-	13-	15-17	Total
Nombre de voitures	3	6	10	12	5	4	40

Calcule **l'écart-type pour le nombre de kilomètres par litre.**

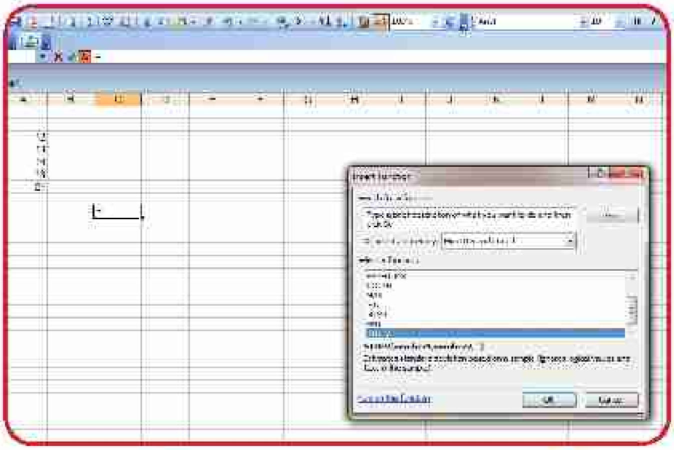
L'utilisation des logiciels pour calculer l'écart-type :

[1] Appuie sur (Start) puis sur (programs) puis sur les tableaux (Excel) Les écrans suivants vont apparaître :

1



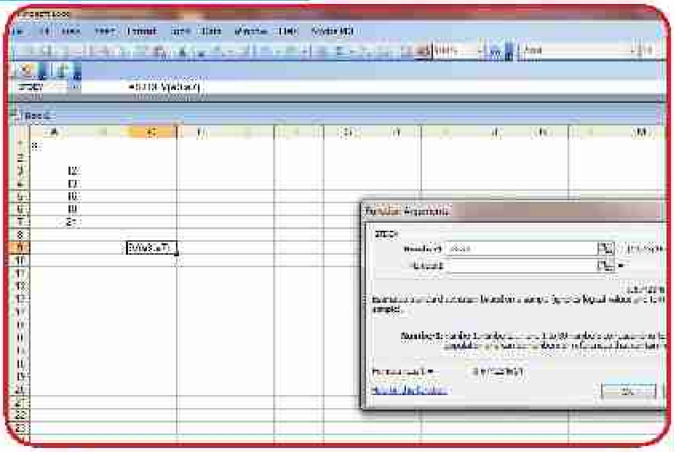
2



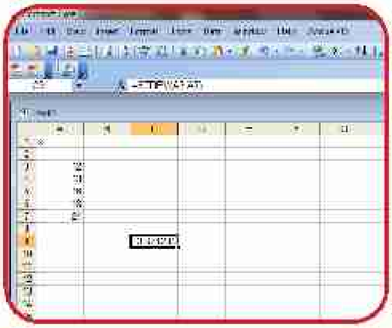
- Introduis les données de l'exemple (1) dans la zone (A_3 , A_7) comme le montre la figure
- Dans le menu (Insert), choisis la fonction (Fx), puis fais exécuter

- Dans la boîte de dialogue de la recherche d'une fonction choisis (STDEVP) puis fais exécuter.

3



4



- Pour calculer l'écart-type pour la population de données, on sélectionne La zone de la variable (A_3 , A_7), puis on fait exécuter.

- On remarque que l'écart-type pour la population de données = 3,286335 C'est le même résultat calculé précédemment à l'aide d'une calculatrice dans l'exemple (1)

Activité

1. En utilisant la méthode des échantillons, choisis un échantillon aléatoire de 10 élèves de ta classe. Mesure ensuite leurs tailles en centimètres, puis calcule la moyenne de tailles des tes camarades. Compare ces résultats obtenus aux résultats obtenus par d'autres camarades. Explique ta réponse.

2. Le tableau ci-contre indique la température dans certaines villes :

   A. Calcule la moyenne arithmétique et l'écart-type pour la température maximale.

   B. Calcule la moyenne arithmétique et l'écart-type pour la température minimale

Ville	Max	Min
Ismailia	25	11
Suez	26	12
Arish	24	10
Nekhl	24	6
Taba	22	7
Tore	26	16
Hurghada	27	15
Rafah	26	11

Tu peux regarder la météo quotidiennement et calculer l'écart-type et garder les calculs dans portfolio)

Epreuve de l'unité

1. ***Explique*** **brièvement ce que c'est un échantillon aléatoire simple en montrant comment le choisir.**

2. ***Calcule*** **la moyenne arithmétique et l'écart-type pour chacune des données suivantes :**

   A. 65, 61, 70, 64, 70, 76, 70   B. 39, 85, 46, 91, 88, 50, 77

   Lequel des deux groupes A et B est le plus harmonisé ?

3. **Dans le tableau des effectifs suivants, calcule la moyenne arithmétique et l'écart-type :**

Intervalles	Zéro →	4 →	8 →	12 →	16 →	Total
Effectifs	3	4	7	2	9	25

4. **La direction d'une usine a fait un sondage d'opinion avec 200 ouvriers pour savoir leurs avis sur ce qu'ils préfèrent manger pendant la pause. Elle a attribuée un numéro entre 1 et 200 à chaque ouvrier, puis elle a choisi un échantillon de 10 % des ouvriers pour les questionner sur ce qu'ils préfèrent :**

   A. les boissons chaudes   B. les repas rapides   C. les crèmes glacées

   à l'aide de ta calculatrice, détermine les numéros des ouvriers ciblés pour constituer l'échantillon.

Unité 4: Trigonométrie



La trigonométrie est l'une des sciences des mathématiques qui étudie la relation entre les longueurs des côtés d'un triangle et les mesures de ses angles. Les anciens égyptiens sont les premiers à utiliser les formules de la trigonométrie pour construire les pyramides et les temples, pour étudier l'astronomie et pour calculer les distances géographiques.

Les babyloniens ont mesuré les angles en degrés, en minutes et en secondes. Le mathématicien Al-Biruni a élaboré les tables des sinus des angles puis le mathématicien Al-Tusi a montré que les sinus des angles sont proportionnels aux côtés qui lui sont opposés. L'Occident a pris connaissance des sciences arabes et musulmanes à travers les traductions des livres de l'astronomie arabe par le savant allemand Yohan Mueller.

Abu Rayhane Al-Biruni est né à Khorezm en 973 et mort en 1046.

4 - 1

Rapports trigonométriques d'un angle aigu



A apprendre

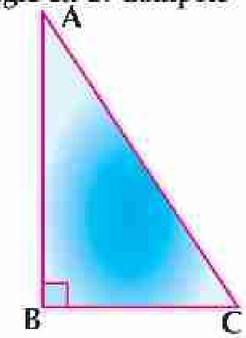
- ☆ Comment trouver les rapports trigonométriques d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Expressions de base

- ☆ Mesure en degrés
- ☆ Sinus d'un angle
- ☆ Cosinus d'un angle
- ☆ Tangente d'un angle

Réfléchis et discute

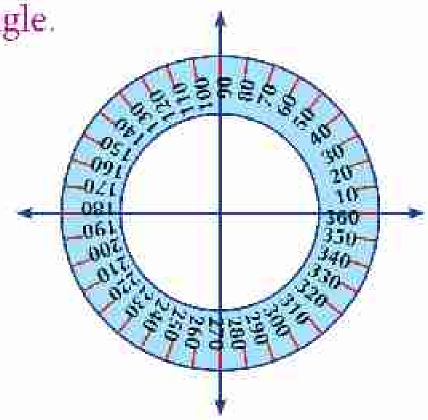
Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B. Compète en utilisant les symboles (> ou < ou =)



1. Si m(∠C) > m (∠A), alors AB ...... BC
2. $\frac{AB}{AC}$ 1
3. $\frac{AC}{BC}$ 1
4. $\frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC}$ ...... $\frac{AB}{BC}$
5. $\frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC}$ 1
6. $\frac{(AB)^2}{(AC)^2} + \frac{(BC)^2}{(AC)^2}$ 1

Mesure en degrés d'un angle.

Nous avons étudié que la somme des mesures des angles formés autour d'un point = 360°. Si on divise ces angles en quatre quadrants égaux, chaque quadrant, contiendra 90° (un angle droit). Le degré est l'unité de mesure en degrés.



Chaque degré est divisé en petites unités comme suit:

Un degré = 60 minutes , Une minute = 60 secondes

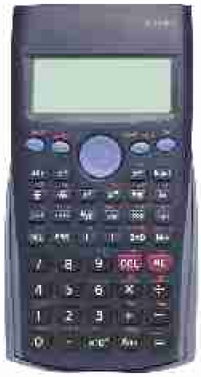
35 degrés, 24 minutes et 42 secondes s'écrit

35° 24′ 42″ Nous pouvons convertir les minutes et les secondes en fractions de degrés par l'une ***des méthodes suivantes*** :

[1] On convertit **24**´en degrés $= \frac{24}{60} = 0{,}4$, On convertit ensuite **42**´´ secondes en minutes puis en degrés : **42**´´ $= \frac{42}{60} = 0{,}7$´

0,7´ $= \frac{0{,}7}{60} = 0{,}0116667$

Donc **35° 24´ 42´´** = 35 + 0,4 + 0,0116667 = 35,4116667°



[2] On utilise une calculatrice comme suit :

35 [° ' ''] 24 [° ' ''] 42 [° ' ''] **Le résultat est :** 35,4116667°

De même, on peut convertir les fractions d'un degré en minutes et secondes.

Par exemple : 54,36° peut être converti en minutes et secondes en utilisant les touches suivantes :

54,36 [° ' ''] [SHIFT] [=] **On obtient le résultat** : **54° 21´ 36´´**

Pour t'entraîner :

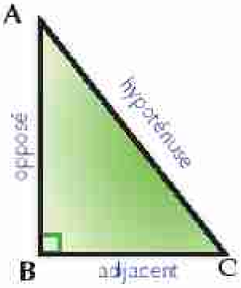
1 **Ecris chacun des angles suivants en degrés :**

A 76° 16´ B 45° 3´ 56´´ C 85° 38´ 8´´ D 65° 26´43´´

2 **Ecris chacun des angles suivants en degrés, minutes et secondes.**

A 34,6° B 78,08° C 56,18° D 83,246°

Rapports trigonométriques de base d'un angle aigu :



La figure ci-contre représente un triangle ABC rectangle en B où les deux angles A et C sont complémentaires. Le côté opposé à l'angle C est appelé « opposé », le côté adjacent à l'angle C est appelé « adjacent » et le ôté opposé à l'angle droit est appelé « hypoténuse ».

Nous allons étudier les rapports trigonométriques de base d'un angle aigu qui sont :

1 **Le sinus d'un angle** : On le note en arabe جا , en français sin et sur la calculatrice [sin] .

2 **Le cosinus d'un angle** : On le note en arabe جتا , en français cos et sur la calculatrice [cos] .

3 **La tangents d'un angle**: On la note en arabe ظا , en français tg et sur la calculatrice [tan] .

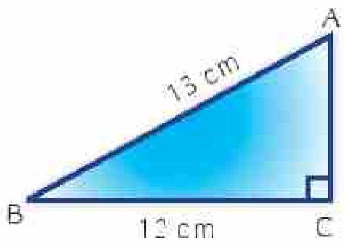
$$\sin C = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos C = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tg } C = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AB}{BC}$$

Exemples

1 ABC est un triangle rectangle en C tel que AB = 13 cm et BC = 12 cm.



A ***Trouve*** la longueur de $\overline{AC}$.

B ***Calcule :*** sin A , cos A , tg A , sin B , cos B et tg B.

C ***Démontre que :*** sin A cos B + cos A sin B = 1.

D ***Calcule :*** $1 + \text{tg}^2 A$

Solution

A ∵ le triangle ABC est rectangle en C ∴ $AC^2 = AB^2 - BC^2$

∴ $AC^2 = (13)^2 - (12)^2 = (13 + 12)(13 - 12) = 25$

∴ AC = 5 cm

B $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos A = \frac{5}{13}$, $\text{tg } A = \frac{12}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{12}{13}$, $\text{tg } B = \frac{5}{12}$

C **Membre de gauche** = sin A cos B + cos A sin B

$$\frac{12}{13} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{144 + 25}{169} = 1$$

D $1 + \text{tg}^2 A = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

Pour t'entraîner :

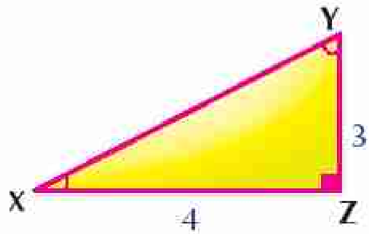
ABC est un triangle tel que AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm. On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$

[1] Trouve la valeur de sin (∠CAD) , cos (∠CAD) et tg (∠CAD)

[2] Démontre que : **A** $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ **B** $\sin B + \cos C > 1$

Exercices (4-1)

1 **Dans la figure ci-contre, complète :**



A) $\sin X = \ldots\ldots$ B) $\cos X = \ldots\ldots$

C) $\text{tg } X = \ldots\ldots$ D) $\cos Y = \ldots\ldots$

E) $\text{tg } Y = \ldots\ldots$ F) $\sin Y = \ldots\ldots$

2 Si les mesures de deux angles complémentaires sont dans le rapport 3 : 5, ***trouve*** en degrés les mesures de ces deux angles .

3 Si les mesures de deux angles supplémentaires sont dans le rapport 3 : 5, ***trouve*** en degrés les mesures de ces deux angles.

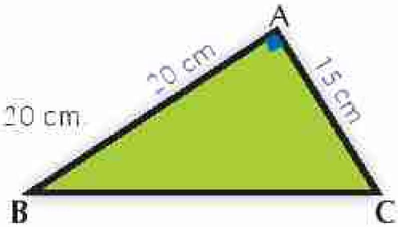
4 Si les mesures des angles d'un triangle sont dans le rapport 3 : 4 : 7, ***trouve*** en degrés les mesures de ces angles.

5 ABC est un triangle rectangle en B tel que AB= 8 cm et BC = 15 cm. Trouve la valeur de chacun des rapports trigonométriques suivants : sin C , cos A , cos C et tg C .

6 ABC est un triangle rectangle en B tel que $2\,AB = \sqrt{3}\,AC$.

Trouve les rapports trigonométriques de base de l'angle C .

7 **Dans la figure ci-contre :**



ABC est un triangle tel que, m (∠A) = 90°, AC = 15 cm et AB = 20 cm.

Démontre que : $\cos C \cos B - \sin C \sin B = 0$

8 XYZ est un triangle rectangle en y tel que XY = 5 cm et XZ = 13 cm.

Trouve **la valeur de :** A) $\text{tg } X + \text{tg } Z$ B) $\cos X \cos Z - \sin X \sin Z$

C) $\sin X \cos Z + \cos X \sin Z$

9 XYZ est un triangle rectangle en Z tel que XZ = 7 cm et XY = 25 cm.

Trouve la valeur de :

A) $\text{tg } C \times \text{tg } Y$ B) $\sin^2 X + \sin^2 Y$

10 ABCD est un trapèze isocèle tel que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, A D = 4 cm, A B = 5 cm et B C = 12 cm. **Démontre que** : $\frac{5 \text{ tg } B \cos C}{\sin^2 C + \cos^2 B} = 3$

4 - 2 Rapports trigonométriques de quelques angles

A apprendre

- ☆ Comment trouver les rapports trigonométriques des angles
- ☆ (30° , 45° , 60°)

Expressions de base

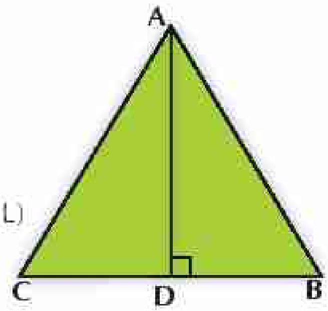
- ☆ rapport trigonométrique
- ☆ Angles particuliers

Réfléchis et discute

1 Dans la figure ci-contre :

ABC est un triangle équilatéral de longueur de côté 2L, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

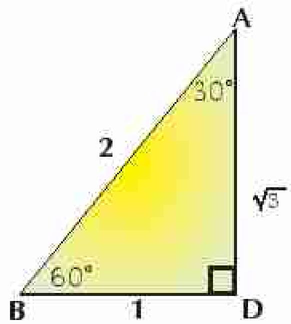
Complète :



1. m (∠B) = ...°
2. m (∠B A D) = ...°
3. B D = ... et A D = ... (en fonction de L)
4. B D : A B : A D = ... : ..... : .....

De ce qui précède, on remarque que :

(1) le triangle ABD est un triangle à 30° et 60° et que le rapport entre les longueurs de ses côtés est BD : AB : AD = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ par conséquent, nous pouvons calculer les rapports trigonométriques de base des angles 30° et 60° **comme suit :**



$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

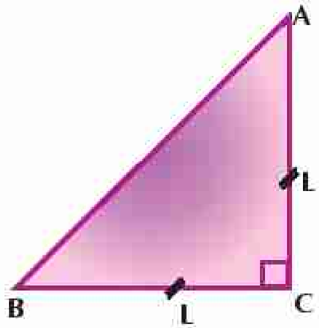
$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$, $\text{tg } 60° = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$

Pour t'entraîner :

Complète : sin 30° = cos ......° tg 30° = $\frac{1}{\dots}$ cos 30° = sin ......°

Réfléchis et discute

1 Dans la figure ci-contre :
ABC est un triangle isocèle rectangle en C dont la longueur de chacun des deux côtés ayant la même longueur est L.



Complète :

1. m ($\angle$A) = ... , m ($\angle$B) = ...
2. $\because$ $AB^2 = AC^2 +$ .... $\therefore$ $AB^2 = L^2 +$ ....
3. AC : BC : AB = ... : .... : ....
   $\therefore$ $(AB)^2 = 2L^2$ $\therefore$ $AB = \sqrt{2}\,L$

De ce qui précède, on remarque que :

Dans le triangle ABC, m ($\angle$A) = m ($\angle$B) = 45° et que le rapport entre les longueurs de ses côtés est AC : BC : AB = 1 : 1 : $\sqrt{2}$. Par conséquent, nous pouvons calculer les rapports trigonométriques de l'angle 45° **comme suit :**

$$\sin 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{tg } 45^\circ = \frac{AC}{BC} = 1$$

Nous pouvons mettre les rapports trigonométriques des angles précédents dans le tableau suivant :

Mesure de l'angle / Rapport	30°	60°	45°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

Remarques:

1. **De ce qui précède, on trouve que :** le **(sinus)** d'un angle est égal au **(cosinus)** du complément de l'angle et réciproquement.

   Par exemple : sin 30° = cos 60°, cos 30° = sin 60°, sin 45° = cos 45°.

2. Pour tout angle A, $\text{tg } A = \frac{\sin A}{\cos A}$

Exemples

1 Trouve la valeur de :

A $\cos 60° \sin 30° - \sin 60° \operatorname{tg} 60° + \cos^2 30°$

B $\dfrac{\cos^2 60° + \cos^2 30° + \operatorname{tg}^2 45°}{\sin 60° \operatorname{tg} 60° - \sin 30°}$

Solution

A L'expression $= \cos 60° \sin 30° - \sin 60° \operatorname{tg} 60° + \cos^2 30°$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

B L'expression $= \dfrac{\cos^2 60° + \cos^2 30° + \operatorname{tg}^2 45°}{\sin 60° \operatorname{tg} 60° - \sin 30°} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

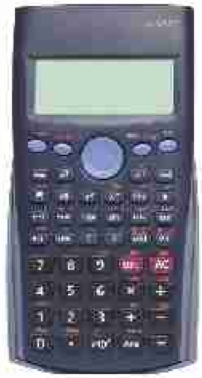
Pour t'entrainer :

Démontre que :

A $\sin^2 30° = 5 \cos^2 60° - \operatorname{tg}^2 45°$

B $\operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{tg}^2 30° = (1 + \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 30°) \div \cos^2 30°$

Exemples



2 Trouve les rapports trigonométriques suivants :

$\sin 43°$, $\cos 53° 28'$, $\operatorname{tg} 64° 37' 49''$

En approchant le résultat à quatre décimales prés.

Solution

Départ → [sin] 43 = $\qquad \sin 43° \simeq 0{,}6820$

Départ → [cos] 53 [°’’’] 28 [°’’’] = $\qquad \cos 53° 28' \simeq 0{,}5953$

Départ → [tan] 64 [°’’’] 37 [°’’’] 49 [°’’’] = $\qquad \tan 64° 37' 49'' \simeq 2{,}1089$

Commercial Press ACP

Détermination d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques :

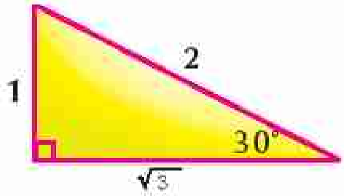
Nous avons déjà étudié comment calculer les rapports trigonométriques d'un angle donné.

Par exemple : pour un angle de mesure 30°, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ et

pour un angle de mesure 33°,

$\sin 33° = 0{,}544639035$

sin 33° = 0,544639035



Maintenant nous voulons calculer la mesure d'un angle en connaissant l'un de ses rapports trigonométriques.

Par exemple : Si $\sin C = 0{,}544639035$, trouver la valeur de C.

Pour calculer x, on utilise une calculatrice comme suit :

Départ → SHIFT sin 0,544639035 = °′″ 33°

Exemples

3 Trouve la mesure de l'angle E dans chacun des cas suivants :

$\sin E = 0{,}6$, $\cos E = 0{,}6217$, $\text{tg } E = 1{,}0823$

Solution

∵ $\sin E = 0{,}6$ ∴ $m(\angle E) = 36°\ 52'\ 12''$ SHIFT sin 0,6 = °′″

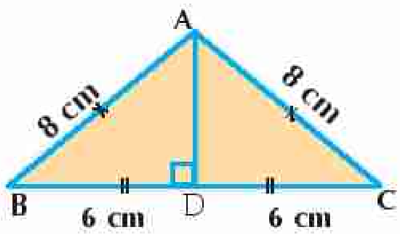
∵ $\cos E = 0{,}6217$ ∴ $m(\angle E) = 51°\ 33'\ 35''$ SHIFT cos 0,6217 = °′″

∵ $\text{tg } E = 1{,}0823$ ∴ $m(\angle E) = 47°\ 15'\ 48''$ SHIFT tan 1,0823 = °′″

4 En lien avec la géométrie : ABC est un triangle isocèle tel que AB = AC = 8 cm et BC = 12 cm.

Trouve : [1] $m(\angle B)$

[2] l'aire du triangle à deux décimales près



Solution

[1] On trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$

∵ le triangle ABC est isocèle

$\therefore$ D est le milieu de $\overline{BC}$ et donc BD = CD = 6 cm

$\because \cos B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

En utilisant une calculatrice :

SHIFT cos **0.75** = °'''

$\therefore m(\angle B) = 41°\ 24'\ 35''$ *(ce qu'il fallait démontrer en 1)*

Pour calculer l'aire du triangle, on trouve AD **(du théorème de Pythagore)**

$\because (AD)^2 = (AB)^2 - (BD)^2$

$\therefore (AD)^2 = 64 - 36 = 28 \quad \therefore AD = 2\sqrt{7}$

$\because$ l'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{7}$

$= 12\sqrt{7}\ cm^2 \simeq 31{,}75 cm^2$ *(ce qu'il fallait démontrer en 2)*

Autre solution pour la deuxième partie de la question:

$\because \sin B = \frac{AD}{AB}$ $\therefore \sin B = \frac{AD}{8}$

$\therefore AD = 8 \sin(41°\ 24'\ 35'')$ (1)

L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ **De** (1)

$\therefore$ L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \sin(41°\ 24'\ 35'') \simeq 31{,}75 cm^2$

On peut utiliser une calculatrice comme suit :

Départ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 × sin 41 °''' 24 °''' 35 °''' =

Pour t'entraîner :

Complète ce qui suit :

1. Si $\sin X = \frac{1}{2}$ où x est un angle aigu, alors $m(\angle X) =$ ....
2. Si $\sin \frac{X}{2} = \frac{1}{2}$ où x est un angle aigu, alors $m(\angle X) =$ ....
3. $\sin 60° + \cos 30° - tg\ 60° =$ ....
4. Si $tg(X + 10) = \sqrt{3}$ où X est un angle aigu, alors $m(\angle X) =$ ....
5. Si $tg\ 3X = \sqrt{3}$ où X est un angle aigu, alors $m(\angle X) =$ ....

Exercices (4-2)

1 **Trouve la valeur de :**

$\sin 45° \cos 45° + \sin 30° \cos 60° - \cos^2 30°$.

2 **Démontre que :**

A $\cos 60° = 2 \cos^2 30° - 1$

B $tg^2 60° - tg^2 45° = \cos^2 60° + \sin^2 60° + 2 \sin 30°$

3 *Trouve la valeur de* **X** *si*

$4X = \cos^2 30° tg^2 30° tg^2 45°$

4 *Trouve* **la valeur de E , où E est un angle aigu**

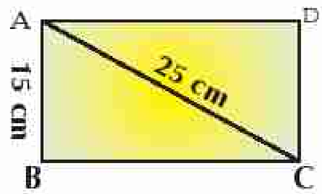
$\sin E = \sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$

5 **En lien avec la géométrie :** Dans la figure ci-contre :

ABCD est un rectangle tel que AB = 15 cm, AC = 25 cm.

Trouve : **[1]** m(∠ACB)

[2] l'aire du rectangle ABCD .

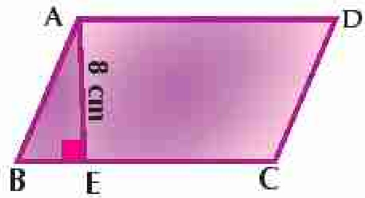


6 **En lien avec la géométrie :** Dans la figure ci-contre :

ABCD est un parallélogramme ayant pour aire 96 cm^2,

BE : EC = 1 : 3,

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ et AE = 8cm



Trouve : **[1]** la longueur de $\overline{AD}$ **[2]** m(∠B)

[3] la longueur de $\overline{AB}$ à une décimale près *(Utilise plus qu'une méthode)*

Activité

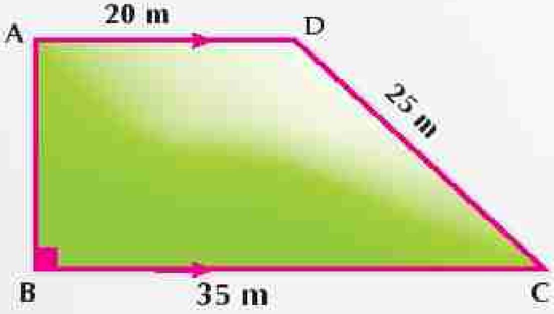
Un terrain est sous la forme d'un trapèze ABCD tel que $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$, $m(\angle B) = 90°$, AD = 20 mètres, BC = 35 mètres et DC = 25 mètres

Conclusion :

A Trouve la longueur de $\overline{AB}$.

B Trouve $m(\angle C)$.

C Si le propriétaire d'un terrain veut construire une fontaine circulaire à l'intérieur du terrain, quelle est la plus grande aire possible ? Calcule dans ce cas l'aire de la partie restante du terrain. (prendre $\pi = 3{,}14$)



Epreuve de l'unité

1 **Démontre que les égalités suivantes sont vraies :**

A $\sin 60° = 2 \sin 30° \cos 30°$

B $\text{tg}\, 60° = \dfrac{2\text{tg}\ 30°}{1 - \text{tg}^2\ 30°}$

2 **Sans utiliser une calculatrice, trouve la valeur de x (où x est un angle aigu) qui vérifie l´égalité :**

A $\text{tg}\, X = 4 \cos 60° \sin 30°$

B $2 \sin x = \sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60°$

3 ABC est un triangle isocèle tel que AB = AC = 12,6 cm et $m(\angle C) = 84°\ 24'$.

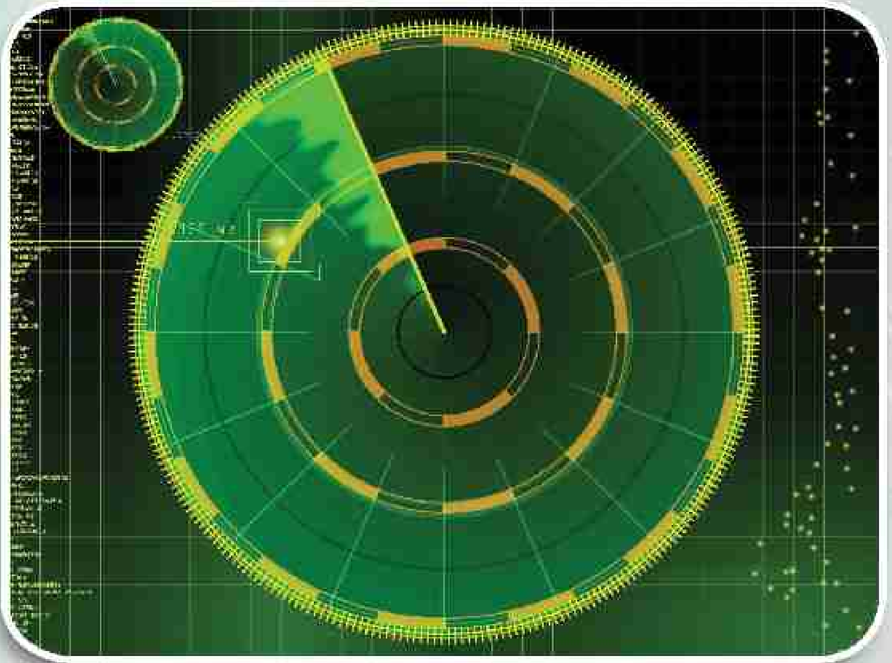
Trouve à une décimale près la longueur de $\overline{BC}$.

4 ABCD est un trapèze tel que $\overrightarrow{AD} \,//\, \overline{BC}$, $m(\angle B) = 90°$. Si AB = 3 cm, AD = 6 cm et BC = 10 cm, **démontre que :** $\cos(\angle DCB) - \text{tg}(\angle ACB) = \frac{1}{2}$

5 Une échelle $\overline{AB}$ de longueur 6 mètres repose par son extrémité supérieure A sur un mur vertical et avec son extrémité inférieure B sur un sol. Si le point C est la projection du point A sur le sol et si l'échelle est inclinée de 60° sur le sol, calcule la longueur de $\overline{AC}$.

Géométrie analytique

Unité (5): Géométrie analytique



On utilise le radar pour déterminer les distances, les hauteurs, les directions et les vitesses des corps mobiles comme les avions et les navires.

L'antenne du radar reçoit les ondes reflétées et sur son écran on peut déterminer les coordonnées de l'objet cible (avion – navire - ……).

5 - 1 Distance entre deux points



A apprendre

- ☆ Comment trouver la distance entre deux points en utilisant la formule

Expressions de base

- ☆ repère cartésien
- ☆ couple
- ☆ Distance entre deux points.

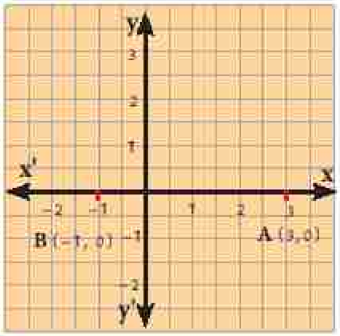
Réfléchis et discute

Nous avons déjà appris à représenter un couple dans un repère cartésien.

Maintenant, peut-on trouver la distance entre les paires de points suivants :

1 A (3, 0) , B (-1, 0) **2** C (0, -3), D (0, -1)

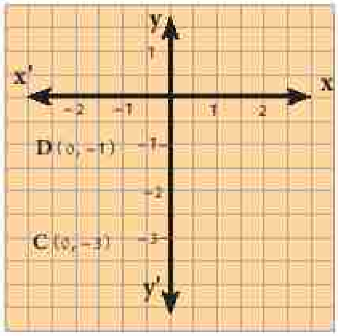
3 M (3, 2), N (7, 5)



De ce qui précède, on remarque que :

1 Les deux points A(3 , 0) et B(-1 , 0) sont situés sur l'axe des abscisses et par conséquent : A B = |-1 -3 | = | -4|

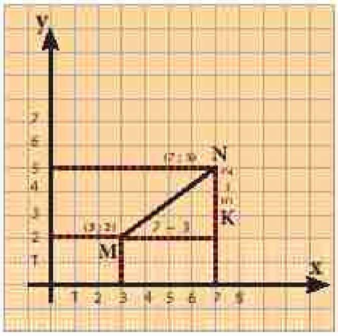
D'où A B = 4 unités de longueur .



2 Les deux points C(0 , -3) et D(0 , -1) sont situés sur l'axe des ordonnées et par conséquent :

C D = |-3 - (-1)| = |-3 +1| = | -2|

D'où C D = 2 unités de longueur .



3 On peut représenter les deux points M(3 , 2) et N(7 , 5) graphiquement comme le montre la figure ci-contre.

Pour trouver la longueur de $\overline{MN}$ on calcule :

M K = |7 -3 |= 4 unités de longueur

N K = |5 -2| = 3 unités de longueur

Le △ M K N est rectangle en K

∴ $(N M)^2 = (M K)^2 + (K N)^2$

(théorème de Pythagore)

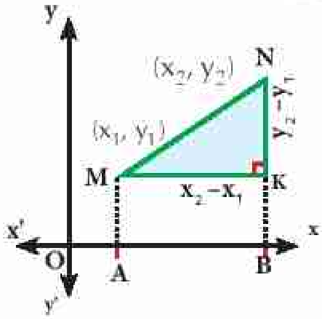
$(N M)^2 = (3)^2 + (4)^2$

$(N M)^2 = 9 + 16$

$(N M)^2 = 25$ ∴ (N M) = 5 unités de longueur

Al-Ahram Commercial Press ACP

D'une manière générale :



Si M (x_1, y_1), N (x_2, y_2) sont deux points dans un repère cartésien,

alors : $KM = |OB - OA|$

$= |x_2 - x_1|$

$KN = |NB - KB| = |y_2 - y_1|$

∵ Le △ NKM est rectangle en K (**théorème de Pythagore**)

∴ $(MN)^2 = (KM)^2 + (KN)^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

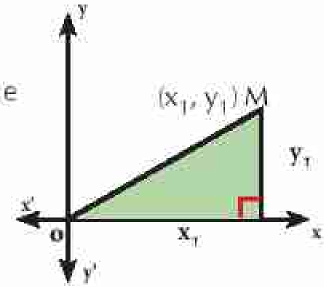
∴ $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La distance entre deux points (x_1,y_1), $(x_2,y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La distance entre les deux points = $\sqrt{\text{carré de la différence des abscisses + carré de la différence des ordonnées}}$

Remarque:

Dans la figure ci-contre, la distance du point (x_1, y_1) au point d'origine O (0, 0) , $OM = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$



Pour t'entraîner :

Soient A , B , C et D quatre points d'un repère orthonormé. Détermine les conditions pour lesquelles ces points sont les sommets de chacune des figures suivantes :

1. un parallélogramme
2. un rectangle
3. un trapèze
4. un carré

Exemples

1. ABCD est un quadrilatère tel que A(2 , 4) , B(-3 , 0) , C(-7 , 5) et D(-2 , 9). Démontre que la figure ABCD est un carré.

Solution

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[-3-2]^2 + [0-4]^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

$BC = \sqrt{[-7-(-3)]^2 + [5-0]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}$

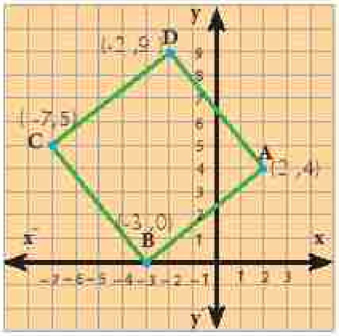
$C\,D = \sqrt{[-2-(-7)]^2 + [9-5]^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$

$D\,A = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [4-9]^2} = \sqrt{(4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

$\because$ A B = BC = DC = D A = $\sqrt{41}$

$\therefore$ **La figure A B C D est un losange.**

Pour démontrer que la figure ABCD est un carré, on peut calculer les longueurs de ses diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$.



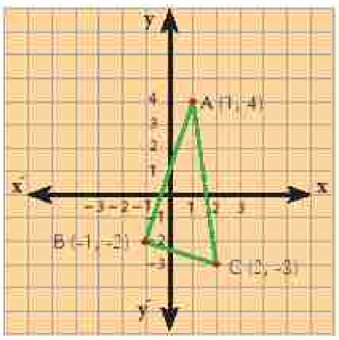
$AC = \sqrt{[-7-2]^2 + [5-4]^2} = \sqrt{(-9)^2 + 1} = \sqrt{82}$

$BD = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [9-0]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (9)^2} = \sqrt{82}$

$\because$ AC = B D = $\sqrt{82}$ **et les côtés de la figure ABCD sont de même longueur,**

$\therefore$ **La figure A B C D est un carré.**

2 Démontre que le triangle ayant pour sommets A(1 , 4) , B(-1 , -2) et C(2 , -3) est rectangle puis calcule son aire.



Solution

$(A\,B)^2 = (-1 - 1)^2 + (-2 - 4)^2 = 4 + 36 = 40$

$(B\,C)^2 = [2 - (-1)]^2 + [-3 - (-2)]^2 = 9 + 1 = 10$

$(A\,C)^2 = (2 - 1)^2 + (-3 - 4)^2 = 1 + 49 = 50$

$(A\,B)^2 + (B\,C)^2 = 40 + 10 = 50$, $(A\,C)^2 = 50$

$\because (A\,C)^2 = (A\,B)^2 + (B\,C)^2$

$\therefore$ M ($\angle$ B) = 90° **(Réciproque du théorème de Pythagore)**

$\therefore$ M ($\triangle$ A B C) $= \frac{1}{2}$ A B × B C $= \frac{1}{2} \times \sqrt{40} \times \sqrt{10} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$ unités carrées

3 Démontre que les points A(3 , -1) , B(-4 , 6) et C(2 , -2) sont situés sur un cercle de centre M(-1 , 2), puis calcule le périmètre du cercle.

Solution

$A\,M = \sqrt{(-1-3)^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$B\,M = \sqrt{[-1-(-4)]^2 + [2-6]^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$C\,M = \sqrt{(-1-2)^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\because$ A M = B M = C M = 5 $\therefore$ Les points A , B et C sont situés sur un cercle de centre M

$\therefore$ Le périmètre du cercle = $2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi$ unités de longueur

Pour t'entraîner :

Démontre que les points : A (4, 3.), B(1, 1.) et C (-5, -3.) sont alignés.

Complète :

$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

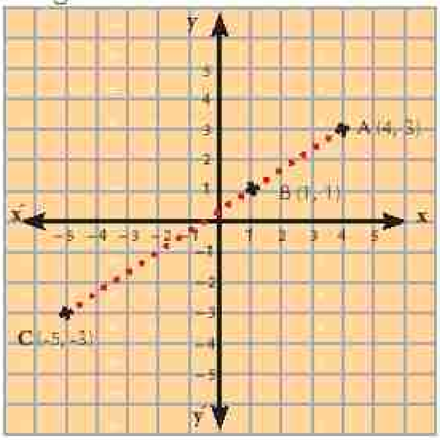
$BC = \sqrt{(-5-1)^2 + (-3-1)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$AC = \sqrt{(-5-4)^2 + (-3-3)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore AB + BC = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\because AB + \ldots\ldots = AC$

$\therefore$ Les points A , B et C sont alignés .



Exercices (5-1)

[1] Complète ce qui suit :

1. La distance du point (-3, 4) au point d'origine est égale à ....
2. La distance entre les deux points (- 5, 0) et (0, 12) est égale à ....
3. La distance entre les deux points (15, 0) et (6, 0) est égale à ....
4. La longueur du rayon du cercle de centre (7, 4) qui passe par le point (3, 1) est égale à ....
5. Si la distance entre les deux points (a, 0) et (0, 1) est égale à une unité de longueur, alors a = ...

[2] Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Les points (0, 0), (6, 0), (0, 8) :
   - A sont les sommets d'un triangle obtusangle
   - B sont les sommets d'un triangle acutangle
   - C sont les sommets d'un triangle rectangle.
   - D sont alignés.
2. Soit un cercle de centre le point d'origine et de rayon de 2 unités de longueur. Lequel, des points suivants, appartient au cercle ?
   - A (1, 2)
   - B (- 2, 1)
   - C $(\sqrt{3}, 1)$
   - D $(\sqrt{2}, 1)$
3. Lesquels des groupes des points suivants sont alignés ?
   - A (1, 4), (3, - 2) et (- 3, 16)
   - B (7, 0), (- 3, - 3) et (22, 9)
   - C (- 1, - 4), (1, 0) et (0, - 2)
   - D (- 1, - 4), (1, 0) et (0, - 2)

[3] Répondre aux questions suivantes :

1 Trouve la valeur de a dans chacun des cas suivants :

A la distance entre les deux points (a , 7) et (-2 , 3) est égale à 5.

B la distance entre les deux points (a , 7) et (3a-1 , -5) est égale à 13.

2 Si A (x, 3), B (3, 2) et C (5, 1) et si AB = BC, trouve la valeur de x.

3 Si la distance du point (x, 5) au point (6, 1) est égale à $2\sqrt{5}$, trouve la valeur de x.

4 Détermine la nature du triangle par rapport à ses angles dans chacun des cas suivants :

A A (3, 10), B (8, 5), C (5, 2)

B A (1, -1), B (2, 1), C (-3, -2)

C A (3, 3), B (4, -1), C (1, 1)

5 Détermine la nature du triangle ayant pour sommets A (- 2, 4), B (3, - 1) et C (4, 5) par rapport à ses côtés.

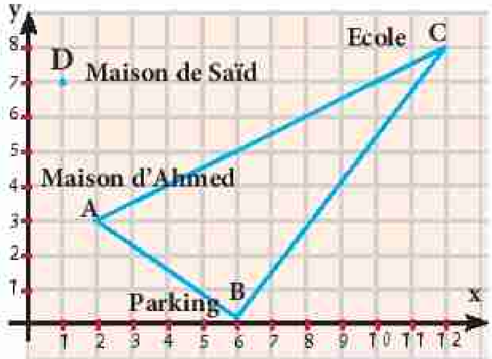
6 Démontre que le triangle ayant pour sommets A (5, -5), B (- 1, 7) et C (15, 15) est rectangle en B, puis calcule son aire.

7 ABCD est un quadrilatère tel que A (5, 3), B (6, -2), C (1, -1) et D (0, 4). Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange, puis calcule son aire.

8 Démontre que les points A (-2, 5), B (3, 3) et C (-4, 2) ne sont pas alignés et si D (-9, 4) démontre que ABCD est un parallélogramme.

9 **Dans la figure ci-contre :**

A Trouve les coordonnées des points représentants les lieux de la maison d'Ahmed, la maison de Saïd, le parking et l'école .



B Trouve la distance entre la maison d'Ahmed et l'école.

C Trouve la distance entre la maison de Saïd et l'école.

D Qu'est-ce qui est plus proche : la maison d'Ahmed par rapport à l'école ou la maison de Saïd par rapport à l'école ?

E Les deux chemins $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont-ils perpendiculaires ? Justifie ta réponse .

Coordonnées du milieu d'un segment

5 - 2



A apprendre

☆ Comment trouver les coordonnées du milieu d'un segment.

Expressions de base

☆ les extrémités d'un segment

☆ les coordonnées du milieu d'un segment

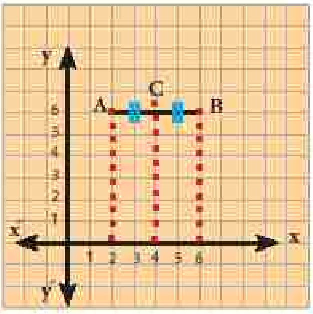
Réfléchis et discute

Dans un repère orthonormé : trouve les coordonnées du point C, le milieu de $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

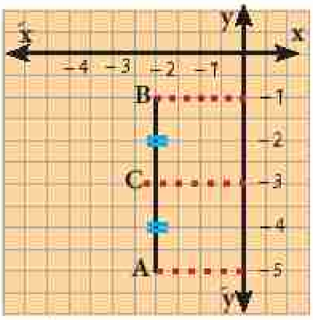
1) A (2, 6) et B (6, 6) **2)** A (-2 , - 5) et B (- 2 , - 1),

3) A (1, 2) et B (5, 6)

(1): Le segment ayant pour extrémités les deux points A (2, 6) et B (6, 6), est parallèle à l'axe des abscisses et les coordonnées du point C son milieu sont C (4, 6).

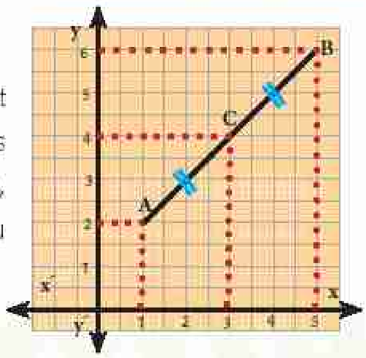


(2) : Le segments ayant pour extrémités les deux points A(-2 , -5) et B(-2 , -1) est parallèle à l'axe des ordonnées et les coordonnées du point C son milieu sont (-2 , -3).



(3) : Dans la figure ci-contre :

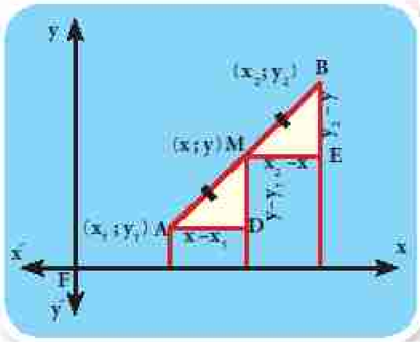
Soit C le milieu du segment ayant pour extrémités les deux points A(1 , 2) et B(5 , 6). Du graphique, on trouve que les coordonnées du point C (3, 4).



Donc C ($\frac{1+5}{2}$, $\frac{2+6}{2}$) d'où C (3, 4)

D'une manière générale nous pouvons déduire la formule du milieu d'un segment comme suit

Soient A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) et M (x, y) où M est le milieu de $\overline{AB}$. De la superposition des deux triangles MDA et BEM :



On trouve que AD = ME

$\therefore x - x_1 = x_2 - x$

$\therefore 2x = x_1 + x_2$ $\qquad \therefore x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

De même, MD = BE $\quad \therefore y - y_1 = y_2 - y$

$\therefore 2y = y_1 + y_2$ $\qquad \therefore y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Exemple : Si C est le milieu de $\overline{AB}$ où A (3, - 7) et B (- 5, - 3),

alors les cordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont $\left(\dfrac{3 - 5}{2}, \dfrac{-7 - 3}{2}\right)$ et donc (- 1, - 5)

Pour t'entraîner :

Trouve les cordonnées du point C, le milieu de $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

1. A(2, 4), B (6, 0)
2. A (7, -5), B (-3, 5)
3. A (-3, 6), B (3, -6)
4. A (7, -6), B (-1, 0)

Exemples

1. Si C (6, -4) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (5, -3), trouve les cordonnées du point B .

Solution

Soit B (x_2, y_2) On a A (5, -3) et C (6 , -4) est le milieu de $\overline{AB}$

$\because x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\therefore 6 = \dfrac{5 + x_2}{2}$ $\qquad \therefore 5 + x_2 = 12$ $\qquad \therefore x_2 = 12 - 5 = 7$

$-4 = \dfrac{-3 + y_2}{2}$ $\qquad \therefore -3 + y_2 = -8$

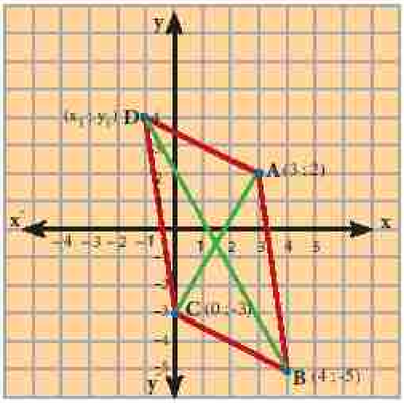
$y_2 = -8 + 3$ $\qquad y_2 = -5$ $\qquad \therefore$ B (7, -5)

2 ABCD est un parallélogramme tel que A(3 , 2), B(4 , -5) et C(0 , -3). Trouve les coordonnées du point d'intersection de ses diagonales, puis trouve les coordonnées du point D.

Solution

La figure ABCD est un parallélogramme et M est le point d'intersection de ses diagonales.

Soit D (x_1 , y_1)



$\because$ M est le milieu de $\overline{AC}$ $\therefore$ $M(\frac{3+0}{2}, \frac{2-3}{2})$

$\therefore$ $M(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

$\because$ M est le milieu de $\overline{BD}$ $\therefore$ $M(\frac{4+x_1}{2}, \frac{-5+y_1}{2})$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{4+x_1}{2}$ $\qquad$ $\therefore$ $3 = 4 + x_1$

$\therefore$ $x_1 = -1$

$\therefore -\frac{1}{2} = \frac{-5+y_1}{2}$ $\qquad$ $\therefore -1 = -5 + y_1$

$\therefore$ $y_1 = 4$

$\therefore$ Les coordonnées du point M sont (-1, 4)

Exercices (5-2)

[1] Complète

A Si le point d'origine est le milieu du segment $\overline{AB}$, où A (5, -2), alors les coordonnées du point B sont ....

B Si A, B, C et D sont quatre points alignés tels que AB = BC = CD, A(1 , 3) et C(5 , 1), trouve :

1) les coordonnées du point B sont (........., ...)

2) les coordonnées du point D sont (........., ...)

C $\overline{AD}$ est une médiane du triangle ABC et M est le milieu de $\overline{AD}$ où A (0, 8), B (3, 2), C (- 3, 6). Alors :

1) les coordonnées du point D sont (........., ...)

2) les coordonnées du point M sont (........., ...)

Vérifie ta réponse en traçant les points

[2]

1 Si C est le milieu du segment $\overline{AB}$, trouve x et y dans chacun des cas suivants :

A	A (1, 5)	B (3, 7)	C (x, y)
B	A (-3, y)	B (9, 11)	C (x, -3)
C	A (x, -6)	B (9, -11)	C (-3, y)
D	A (x, 3)	B (6, y)	C (4, 6)

2 Si A (1, - 6) et B (9, 2) , trouve les coordonnées des points qui partagent $\overline{AB}$ en quatre segments de même longueur.

3 Démontre que les points A (6, 0), B (2, -4) et C (-4, 2) sont les sommets d'un triangle rectangle en B, puis trouve les coordonnées du point D pour que la figure ABCD soit un rectangle.

4 Si les points A (3, 2), B (4, -3), C (-1, -2) et D (-2, 3) sont les sommets d'un losange, trouve :

A les coordonnées du point d'intersection de ses diagonales .

B l'aire du losange ABCD.

5 Démonte que les points A, (-3, 0), B (3, 4) et C (1, -6) sont les sommets d'un triangle isocèle en A, puis trouve la longueur la hauteur abaissée de A sur $\overline{BC}$.

6 Si A (-1, -1), B (2, 3),C (6, 0) et D (3, -4) sont quatre points dans un repère orthonormé, démontre que $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ se coupent en leur milieu, puis détermine la nature le la figure.

7 Démontre que les points A (5, 3), B (3, -2) et C (-2, -4) sont les sommets d'un triangle obtusangle en B, puis détermine les coordonnées du point D pour que la figure ABCD soit un losange, puis calcule son aire.

8 ABCD est un parallélogramme tel que A (3, 4), B (2, -1), C (-4, -3). Trouve les coordonnées du point D. Si E est un point de $\overrightarrow{AD}$ tel que AE = 2 AD, quelles sont les coordonnées du point E ?

Pente d'une droite

5 - 3

On sait que la pente d'une droite passant par les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est égale à $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ où $x_2 > x_1$



A apprendre

☆ La relation entre les pentes de deux droites parallèles

☆ La relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

Réfléchis et discute

Trouve la pente de la droite passant par chaque paire des points suivants :

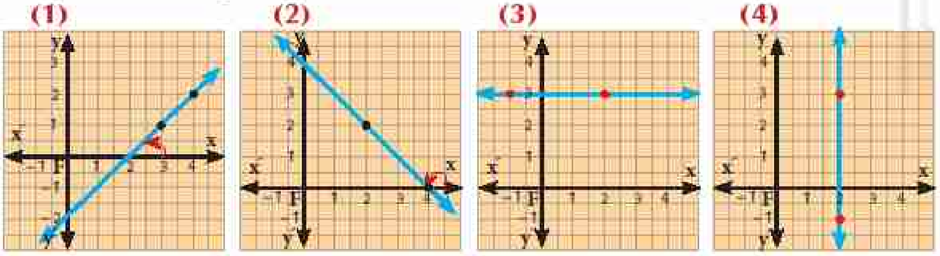
(1) (3, 1), (4, 2) **(2)** (4, 0), (2, 2)

(3) (-1, 3), (2, 3) **(4)** (2, -1), (2, 3)

Que remarques-tu ?

De ce qui précède, on peut tracer les droites passant par les paires de points précédents dans un repère orthonormé comme dans les figures suivantes :

(1) **(2)** **(3)** **(4)**



Expressions de base

☆ mesure positive de l'angle

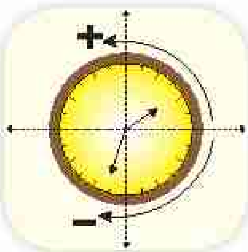
☆ mesure négative de l'angle

☆ pente d'une droite

☆ deux droites parallèles

☆ Deux droites perpendiculaires

Mesure positive et mesure négative d'angle :



Un angle est considéré positif s'il est pris contre le sens des aiguilles d'une montre. Il est considéré négatif s'il est pris dans le sens des aiguilles d'une montre.

Des figures précédentes, on déduit que :

Figure	Pente $\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$	Nature de l'angle positif qui fait la droite avec le sens positif de l'axe des x	Pente de la droite
1	$m = \frac{2-1}{4-3} = 1$	Aigu	Plus grande que zéro
2	$m = \frac{2-0}{2-4} = -1$	Obtus	Plus petite que zéro
3	$m = \frac{3-3}{2+1} = 0$	Nul	Egale zéro
4	$m = \frac{3+1}{2-2}$ (indéfini)	Droit	Indéfinie

Définition de la pente d'une droite :

C'est la tangente de l'angle positif que fait la droite avec le sens positif de l'axe des abscisses.

Donc **la pente de la droite = tg E, où E est l'angle positif que fait la droite avec le sens positif de l'axe des abscisses**

Exemples

1. Trouve la pente de la droite qui fait un angle de mesure 56° 12` 48`` avec le sens positif de l'axe des abscisses.

2. Trouve la mesure de l'angle positif que fait une droite avec le sens positif de l'axe des abscisses si la pente de cette droite est 1,4865 .

Solution

1. $\because$ m = tg E $\therefore$ m = tg 56° 12` 48`` = 1,494534405

Départ → tan 56 °''' 12 °''' 48 °''' =

2. $\because$ m = tg E $\therefore$ tg E = 1,4865 $\therefore$ m (∠ E) = 56° 4` 13``

Départ → SHIFT tan 1,4865 = °'''

Pour t'entraîner :

1. Trouve la pente de la droite qui fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure :

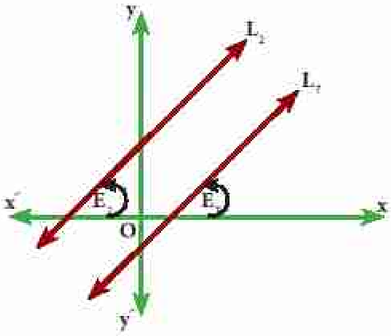
   A 30° B 45° C 60°

2. En utilisant une calculatrice, trouve la mesure de l'angle positif que fait une droite ayant pour pente avec le sens positif de l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants :

   A p = 0,3673 B p = 1,0246 C p = 3,1648

Relation entre les pentes de deux droites parallèles .

Réfléchis et discute



La figure ci-contre représente deux droites parallèles L_1 et L_2 de pentes respectives P_1, P_2, qui font avec le sens positif de l'axe des abscisses deux angles de mesures respectives E_1 et E_2

Complète ce qui suit :

1. m ($\angle$ E_1) = m ($\angle$ E_2) car ....
2. tg E_1 .... tg E_2
3. p_1 .... p_2

De ce qui précède, on déduit que :

Si L_1 // L_2 , **alors** $p_1 = p_2$

D'où : Si deux droites sont parallèles, alors elles ont la même pente et réciproquement .

Si $p_1 = p_2$, alors L_1 // L_2

D'où : Si deux droites ont la même pente, alors elles sont parallèles

Exemples

1. Démontre que la droite passant par les deux points (-3, -2), (4, 5) est parallèle à la droite qui fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure 45°

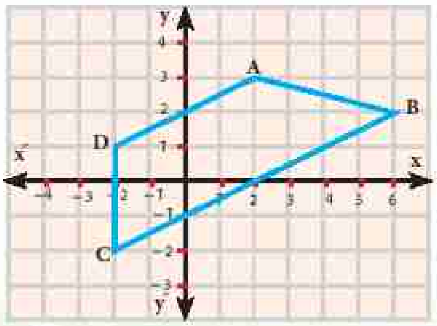
Solution

La pente de la première droite $(p_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{7}{7} = 1$

La pente de la deuxième droite (p_2) = tg 45° = 1

$\because p_1 = p_2$ $\therefore$ les deux droites sont parallèles.

2. Dans un repère cartésien, représente graphiquement les points A (2, 3), B (6, 2), C (-2, -2) et D (- 2, 1), puis démontre que la figure ABCD est un trapèze



Solution

Du graphique, on trouve que : $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Pour démontrer ce résultat analytiquement, on calcule les pentes de : $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$

Soit p_1 la pente de $\overline{AD}$

$\because p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\therefore p_1 = \frac{3-1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Soit p_2 la pente de $\overline{BC}$

$p_2 = \frac{2+2}{6+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\because p_1 = p_2$ $\therefore \overline{AD} // \overline{BC}$

$\therefore$ La figure ABCD est un trapèze si les points A, B, C et D ne sont pas alignés ..... (1)

$\because$ La pente de $\overline{AB} = \frac{3-2}{2-6} = \frac{1}{-4}$ et La pente de $\overline{CD} = \frac{2+1}{-2+2} =$ .... (indéfinie)

$\therefore$ Les droites $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$ ne sont pas parallèles .... (2)

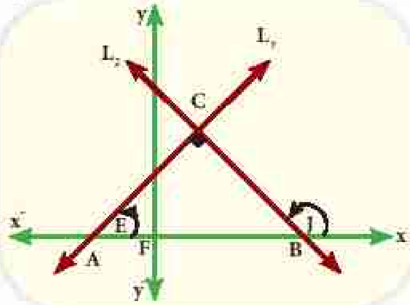
De (1), (2) $\therefore$ La figure ABCD est un trapèze .

Pour t'entraîner :

1. Démontre que la droite passant par les deux points (2 , 3) et (0 , 0) est parallèle à la droite passant par les deux points (-1 , 4) et (1 , 7)
2. Démontre que la droite passant par les deux points (2 , -1) et (6 , 3) est parallèle à la droite qui fait un angle de mesure 45° avec le sens positif de l'axe des abscisses.
3. Si $\overleftrightarrow{AB}$ // l'axe des ordonnées où A (x, 7) et B (3, 5) , trouve la valeur de x.
4. Si $\overleftrightarrow{CD}$ // l'axe des abscisses où C (4, 2) et D (- 5,y) trouve la valeur de y.

Relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

Réfléchis et discute



La figure ci-contre : représente deux droites L_1 et L_2 de pentes respectives p_1, p_2 où $L_1 \perp L_2$.

Trouve la relation entre $\angle$ E et $\angle$ J)

Complète le tableau suivant en utilisant une calculatrice :

Valeur de E	20°	40°	......	......	....
Valeur de J	....	......	140°	150°	......
tg E × tg J	......	......	......	......	......



Du tableau précédent, on trouve que :

tg E_1 × tg J_2 = -1 **d'où** : $p_1 \times p_2 = -1$

Si L_1 et L_2 sont deux droites de pentes respectives p_1 et p_2, où $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^*$

Si $L_1 \perp L_2$ alors $p_1 \times p_2 = -1$

Si deux droites sont perpendiculaires, alors le produit de leurs pentes = -1

Réciproquement, $p_1 \times p_2 = -1$, alors $L_1 \perp L_2$

D'où Si le produit des pentes de deux droites = -1, alors elles sont perpendiculaires.

Exemples

1 Démontre que la droite passant par les deux points $(4, 3\sqrt{3})$ et $(5, 2\sqrt{3})$ est perpendiculaire à la droite qui fait, avec le sens positif de l'axe des abscisses, un angle de mesure 30°.

Solution

Soit p_1 la pente de la première droite et p_2 la pente de la deuxième droite.

$\because p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad \therefore p_1 = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{4 - 5} = -\sqrt{3}$

$\because p = \text{tg } E$ $\qquad \therefore p_2 = \text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore p_1 \times p_2 = -\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -1$ $\qquad \therefore$ Les droites sont perpendiculaires.

2 Si le triangle ayant pour sommets X(4, 2), Y (3, 5) et Z (-5, A) est rectangle en Y, trouve la valeur de A.

Solution

On cherche la pente de $\overleftrightarrow{XY}$ d'où $p_1 = \frac{5 - 2}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$,

On cherche la pente de $\overleftrightarrow{ZY}$ d'où $p_2 = \frac{A - 2}{-5 - 4} = \frac{A - 2}{-9}$

$\because$ Le triangle XYZ est rectangle en Y $\qquad \therefore p_1 \times p_2 = -1$

$\therefore -3 \times \frac{A - 2}{-9} = -1$ $\qquad \therefore \frac{(A - 2)}{3} = -1$

$\therefore A - 2 = -3$ $\qquad \therefore A = 2 - 3$ $\qquad \therefore A = -1$

Pour t'entraîner :

Trouve la pente de la droite perpendiculaire à la droite passant par les deux points (3, -2) et (5, 1).

Exercices (5-3)

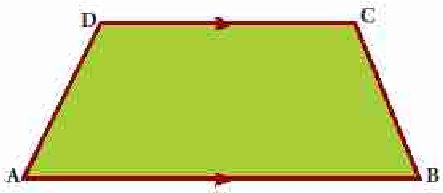
[1]: Complète ce qui suit

1. Si $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ et si la pente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$, alors la pente de $\overleftrightarrow{CD}$ est égale à ....
2. Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ et si la pente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$, alors la pente de $\overleftrightarrow{CD}$ est égale à ....
3. La pente d'une droite parallèle à la droite passant par les deux points (2 , 3) et (-2 , 3) est égale à ....
4. Si la droite $\overleftrightarrow{AB}$ est parallèle à l'axe des abscisses où A(8 , 3) et B (2, k), alors la valeur de k = ...
5. Si la droite $\overleftrightarrow{CD}$ est parallèle à l'axe des ordonnées où C(m , 4) et D(-5 , 7), alors la valeur de m = ...
6. Si le triangle ABC est rectangle en B tel que A(1 , 4) et B(-1 , -2), alors la pente de $\overleftrightarrow{BC}$ est .....
7. Si la droite passant par les deux points (a , 0) et (0 , 3) et la droite qui fait un angle de mesure 30° avec le sens positif de l'axe des abscisses sont perpendiculaires, alors a = ...

[2]

1. Démontre que la droite passant par les deux points A(-3 , 4) et C(-3 , -2) est perpendiculaire à la droite passant par les deux points B(1 , 2) et D(-3 , 2).
2. Si A(-1, -1) , B(2 , 3) et C(6 , 0), démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
3. Si la droite L_1 passe par les deux points (3, 1) et (2, k) et la droite L_2 fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure 45°, trouve la valeur de k sachant que L_1 et L_2 sont :

   A parallèles   B perpendiculaires
4. Si les points (0 , 1) , (a , 3) et (2 , 5) sont alignés, trouve la valeur de a.
5. Démontre que les points A(-1 , 1) , B(0 , 5) , C(4 , 2) et D(5 , 6) sont les sommets d'un parallélogramme.
6. Utilise les formules de la pente pour démontrer que les points A(-1 , 3) , B(5 , 1) , C(6 , 4) et D (0 , 6) sont les sommets d'un rectangle.
7. Dans la figure ci-contre, A B C D est un trapèze tel que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, A (9, -2), B (3, 2), C (x, -x), D (4, -3). Trouve les cordonnées du point C



8. Démontre que les points A (4, 3) , B (7, 0) et C (1, -2) sont les sommets d'un triangle. Si D (1 , 2), démontre que la figure ABCD est un trapèze, puis trouve le rapport entre AD et BC.

L'équation d'une droite connaissant sa pente et l'ordonnée de son point intersection avec l'axe des ordonnées

5 - 4

Réfléchis et discute

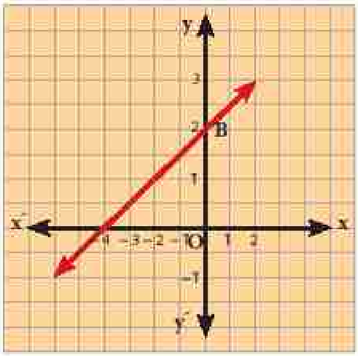
Nous avons déjà étudié la relation linéaire suivante entre deux variables x et y :
$a x + b y + c = 0$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$
Cette relation est représentée par une droite.

Exemple

Représente la relation $x - 2y + 4 = 0$ graphiquement.
Du graphique, calcule :

A la pente de la droite.

B la longueur de la partie verticale comprise entre le point d'origine et le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.



Pour dessiner plus facilement, il est préférable de déterminer les points d'intersection de la droite avec les deux axes comme suit :

$y = 0$	$\therefore x + 4 = 0$	
$\therefore x = -4$	$(-4 , 0)$	**Le point (-4 , 0) vérifie la relation.**
$x = 0$	$\therefore -2y + 4 = 0$	
$\therefore 2y = 4$	$(0, 2)$	**Le point (0 , 2) vérifie la relation.**

Du graphique, on trouve que la pente de la droite

(P) > 0 ..... **(Pourquoi ?)** D'où $P = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

La distance entre les deux points O et B est appelée la partie coupée de l'axe des ordonnées el elle est notée par (c). Dans cet exemple, la longueur de c est deux unités de longueur. Nous pouvons mettre l'équation précédente sous la forme : $y = Px + c$

Dans ce cas, $2y = x + 4$ En divisant les deux membres par 2

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$

On remarque sous cette forme que la pente de la droite (P) est le coefficient de x. Ce coefficient est égal à $\frac{1}{2}$, et que la longueur de la partie coupée de l'axe des y est $c = 2$. C'est le même résultat obtenu du graphique précédent.



A apprendre

☆ Comment trouver l'équation d'une droite en connaissant sa pente et la partie coupée de l'axe des ordonnées

Expressions de base

☆ équation d'une droite
☆ pente d'une droite
☆ la partie coupée de l'axe des ordonnées

Equation d'une droite :

L'équation de la droite ayant pour pente P et pour partie coupée de l'axe des ordonnées c est sous la forme :

$y = Px + c$ où $P \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

On remarque que : On peut mettre l'équation de la droite $ax + by + c = 0$ où $b \neq 0$ sous la forme : $y = mx + c$ comme suit :

$ax + by + c = 0$ donc $by = -ax - c$

$\therefore y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

C'est la même forme que $y = Px + c$ d'où $P = \frac{-a}{b} = \frac{-\text{Coefficient } x}{\text{Coefficient } y}$

et c est la longueur de la partie coupée de l'axe des ordonnées

Exemples

1 Trouve la pente de la droite d'équation $3x + 4y - 5 = 0$ de deux méthodes différentes, puis trouve la longueur de la partie coupée de l'axe des ordonnées.

Solution

$\because$ L'équation de la droite est sous la forme $ax + by + c = 0$ où $b \neq 0$

$\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-a}{b}$ $\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-3}{4}$

Nous pouvons mettre l'équation de la droite sous la forme $y = Px + c$

$\therefore 4y = -3x + 5$ $y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{4}$

$\therefore$ La pente de la droite $= \frac{-3}{4}$ $\therefore$ La partie coupée de l'axe des ordonnées $= \frac{5}{4}$

2 Trouve l'équation de la droite passant par le point (1 , 2) et perpendiculaire à la droite passant par les deux ponts A(2 , -3) et B(5 , -4).

Solution

$\because$ La pente de la droite passant par les deux points A et B $= \frac{-4-(-3)}{5-2} = \frac{-4+3}{5-2} = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ La pente de la droite qui lui est perpendiculaire = 3

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = 3x + c$

$\because$ La droite passe par le point (1 , 2) $\therefore$ ce point vérifie son équation

$\therefore 2 = 3 \times 2 + c$

$\therefore c = 2 - 6 = -4$

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = 3x - 4$

3 Soient A(-3 , 4) , B(5 , -1) et C(3 , 5). Trouve l'équation de la droite passant par le sommet A et par le milieu de $\overline{BC}$.

Solution

Le point milieu de $\overline{BC} = (\frac{3+5}{2}, \frac{5-1}{2}) = (\frac{8}{2}, \frac{4}{2}) = (4, 2)$

$\therefore$ La pente de la droite demandée $= \frac{2-4}{4+3} = \frac{-2}{7}$

$\because y = mx + c$ $\qquad\qquad \therefore y = \frac{-2}{7}x + c$

$\because$ La droite passe par le point A(-3 , 4), donc ce point vérifie son équation

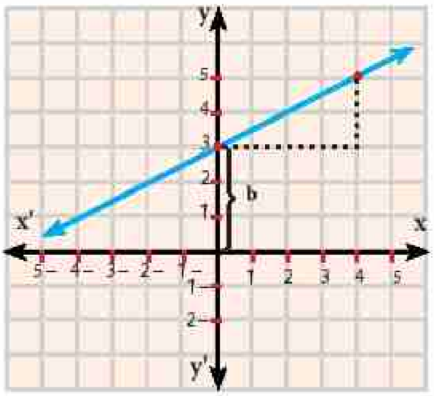
$\therefore 4 = \frac{-2}{7} \times -3 + c$ $\qquad \therefore 4 = \frac{6}{7} + c$ $\qquad \therefore c = \frac{22}{7}$

$\therefore$ L'équation de la droite est sous la forme $y = \frac{-2}{7}x + \frac{22}{7}$ En multipliant les deux membres de l'équation par 7

$\therefore 7y = -2x + 22$ $\qquad \therefore$ L'équation est : $2x + 7y - 22 = 0$

Pour t'entraîner :

1 **Dans la figure ci-contre, trouve :**



A la pente P de la droite.

B la longueur c de la partie coupée de l'axe des ordonnées.

C l'équation de la droite en connaissant P et c.

D la longueur de la partie coupée de l'axe des abscisses.

E l'aire du triangle délimité par la droite et les deux parties coupées des deux axes.

Exercices (5-4)

1 Si $y = Px + c$ représente l'équation d'une droite en fonction de sa pente et de la partie coupée de l'axe des ordonnées, complète ce qui suit :

A L'équation de la droite pour P = 1 et c = 3 est sous la forme ....

B L'équation de la droite pour P = -2 et c = 1 est sous la forme ....

C L'équation de la droite pour P = 3 et c = 0 est sous la forme ....

2 Trouve la pente de la droite et la longueur de la partie coupée de l'axe de ordonnées dans chacun des cas suivants :

A $2x - 3y - 6 = 0$ $\qquad$ **B** $5x + 4y - 10 = 0$ $\qquad$ **C** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

3 **Trouve l'équation de la droite dans chacun des cas suivants :**

A Sa pente est égale à 2 et elle coupe une partie positive de l'axe des ordonnées de 7 unités de longueur.

B Sa pente est égale à la pente de la droite d'équation $\frac{y-1}{x} = \frac{1}{3}$ et qui coupe une partie négative de l'axe des ordonnées de 3 unités de longueur.

C Elle passe par les deux points (2 , -1) et (1 , 1).

D si P = 0 et c = 0 .

4 Trace la droite dans chacun des cas suivants :

A Sa pente est égale à $\frac{-1}{2}$ et elle coupe une partie positive de l'axe des ordonnées de une unité de longueur.

B Sa pente est égale à 2 et elle coupe une partie négative de l'axe des ordonnées de 3 unités de longueur

C elle coupe une partie positive de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées de longueurs respectives de 2 et 3 unités.

5 Le tableau ci-contre représente une relation linéaire :

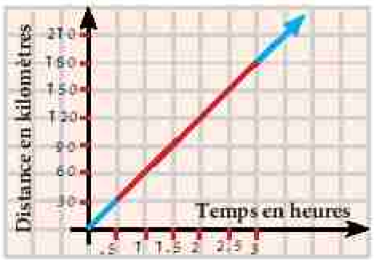
x	1	2	3
y= f (x)	1	3	A

A Trouve l'équation de la droite.

B Trouve la longueur de la partie coupée de l'axe des ordonnées.

C Trouve la valeur de a.

6 La figure ci-contre représente la relation entre la distance (d) parcourue par une voiture en kilomètres et le temps (t) écoulé en heures. Trouve :



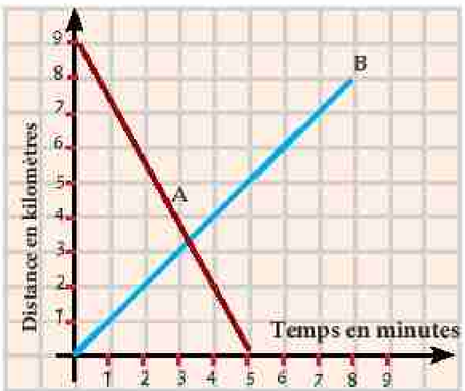
A la distance parcourue après 90 minutes.

B le temps écoulé pour parcourir 150 kilomètres.

C la vitesse de la voiture.

D l'équation de la droite qui représente la relation entre la distance et le temps.

7 La figure ci-contre représente la relation entre la distance (d) en kilomètres et le temps (t) écoulé en minutes pour chacun de deux corps A et B.



A Les deux corps A et B ont-ils commencé le mouvement au même moment ?

B Au bout de combien de temps les deux corps se sont-ils rencontrés ?

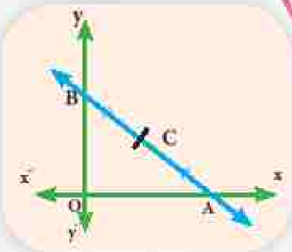
C Quelle est la vitesse du corps A ?

D Ecris l'équation de la droite qui représente la relation entre la distance et le temps pour le corps B.

Activité

1 **Dans la figure ci-contre :**

Le point C est le milieu de $\overline{AB}$ où C (4, 3).



(1) Complète ce qui suit :

- **A** O A = ... unités de longueur
- **B** O B = ... unités de longueur

(2) Choisis chaque information de la colonne A avec l'information convenable de la colonne B :

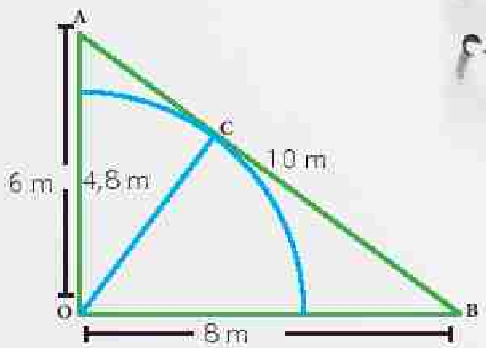
Colonne A	Colonne B
A Pente de $\overleftrightarrow{AB}$	-1
B Pente de $\overleftrightarrow{OC}$	$\frac{-3}{4}$
C Pente de $\overleftrightarrow{OA}$	0
D Pente de $\overleftrightarrow{OB}$	$\frac{3}{4}$
H Pente de $\overleftrightarrow{OB}$ ×	1
Pente de $\overleftrightarrow{OA}$	indéfinie

(3) Trouve les cordonnées des points A, B et O puis trouve l'équation de la droite $\overleftrightarrow{AB}$, et l'équation de la droite $\overleftrightarrow{CO}$.

(4) Trouve les longueurs $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CO}$

(5) Démontre par plusieurs méthodes que C est le centre du cercle passant par les points A, O et B.

2 Une vache est attachée au point O par une corde de longueur 4,8 mètres. Le terrain OAB est cultivé en trèfles. Calcule à un mètre carré près l'aire de la partie du terrain que la vache ne peut pas atteindre pour manger



Modèle (1)

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) : Choisi la bonne réponse :-

1) Le point (-3 ; 4) est situé dans le …………… quadrant.
   (a) premier (b) deuxième (c) troisième (d) quatrième
2) La racine carrée positive de la moyenne des carrées des écarts des valeurs à la moyenne arithmétique est appelée ………
   a) étendu b) moyenne arithmétique c) écart-type d) le mode
3) Si 3 a = 4 b ; alors a : b = ……
   a) 3 : 4 b) 4 : 3 c) 3 : 7 d) 4 : 7
4) Si Card (X) = 2 ; Card (Y^2) = 9 ; alors Card (X × Y) = ….
   a) 6 b) 18 c) 11 d) 7
5) L'étendu des valeurs 7 ; 3 ; 6 ; 9 ; 5 est ………
   a) 3 b) 4 c) 6 d) 12
6) Si $y \propto x$ et y = 2 quand x = 8, alors y = 3 quand x = …...
   a) 16 b) 12 c) 24 d) 6

Question (2) :

(a) Si X × Y = {(2 ; 2) ; (2 ; 5) ; (2 ; 7)}, Trouvez (1) Y (2) Y × X

(b) Si a ; b ; c et d sont proportionnelles, démontre que : $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

Question (3) :

a) Soient X = {2 ; 3 ; 5}, Y = {4 ; 6 ; 8 ; 10}. R est une relation de X vers Y. où a R b signifie que **«2a = b»** pour tout a ∈ X, b ∈ Y.
   1) Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal
   2) . Montrez que R est une fonction.

b) Trouve le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes du rapport 7 : 11 , il devient 2 : 3

Question (4) :

a) Si X = {1 ; 3 ; 5} et **R**, est une fonction définie sur X. Si le graphe de la fonction G = {(a ; 3) ; (b ; 1) ; (1 ; 5)}, Trouvez :
   1) L'ensemble image de la fonction 2) la valeur numérique de l'expression a + b.

b) Si $y \propto \frac{1}{x}$ et y = 3 quand x = 2, trouvez :
   1) la relation entre x et y 2) la valeur de y quand x = 1 , 5.

Question (5) :

a) Représentez graphiquement la courbe de la fonction f où $f(x) = (x-3)^2$,
En prenant x ∈ [0 ; 6]. Du graphique, déduire les coordonnées du sommet de la courbe ; la valeur minimale de la fonction f et l'équation de l'axe de la symétrie

b) Calcule la moyenne arithmétique et l'écart-type des valeurs : 8 ; 9 ; 7 ; 6 ; 5

Modèle (2)

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) : Choisi la bonne réponse :-

1) Le point (3 ; 4) est situé dans le …………… quadrant.
   (a) premier (b) deuxième (c) troisième (d) quatrième
2) L'une des méthodes de mesurer la dispersion est …………
   a) médiane b) moyenne arithmétique c) écart-type d) le mode
3) La troisième proportionnelle des deux nombres 3 et 6 est …
   a) $\frac{1}{2}$ b) 9 c) 2 d) 12
4) Si Card (X) = 2 ; Card (Y× X) = 6 ; alors Card (Y^2) = ….
   a) 4 b) 9 c) 16 d) 12
5) Si l'étendu des valeurs 7 ; 3 ; 6 ; 9 ; 5 est …………
   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
6) Si xy = 7 alors, $y \propto$ …...
   a) $\frac{1}{x}$ b) $x - 7$ c) x d) $x + 7$

Question (2) :

a) Si X = {2 ; 5} , Y = {1 ; 2} et Z = { 3} Trouvez
   (1) Card $(X \times Z)$ (2) $(Y \cap X) \times Z$

b) Si b est la moyenne proportionnelle de a et c, démontre que : $\frac{a-b}{a-c} = \frac{b}{b+c}$

Question (3) :

a) Soient X = {1 ; 3 ; 4 ; 5} et Y = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. R est une relation de X vers Y où a R b signifie que «a + b = 7» pour tout $a \in X$, $b \in Y$.
   1) Écris le graphe de R, puis représente-le par un diagramme sagittal
   2) Montrez que R est une fonction.

b) Si 5a = 3b , trouve la valeur de : $\frac{7a+9b}{4a+2b}$

Question (4) :

a) Si f(x) = 4x + b et si f(3) = 15, trouve la valeur de b

b) Si $y \propto x$ et y = 6 quand x = 3, trouvez :
   1) la relation entre x et y 2) la valeur de y quand x = 5.

Question (5) :

a) Représentez graphiquement la courbe de la fonction f où $f(x) = 4 - x^2$,
En prenant $x \in [-3 ; 3]$. Du graphique, déduire les coordonnées du sommet de la courbe et la valeur maximale de la fonction f et l'équation de l'axe de la symétrie.

b) Le tableau suivant représente le nombre d'enfants de 100 familles dans une ville :

Nombre d'enfants (x)	0	1	2	3	4	total
Nombre de familles (y)	6	15	40	25	14	100

Calcule la moyenne arithmétique et l'écart-type

Modèle (Damg)   Algèbre

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) : Complète:-

1) Le point (5 ; 3) est situé dans le ………………. quadrant.
2) La fonction $f(x) = x^3 + 8$ est une fonction polynôme de ………….. degré
3) L'étendu des valeurs 4 ; 14 ; 25 ; 34 est ....
4) Si $y = 2x$; alors, $y \propto$ ……..
5) Si $X = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$; alors card (X^2) = …..
6) Si $(a ; 3) = (6 ; b)$; alors $a + b$ = ……

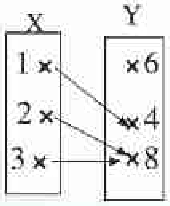
Question (2) : Choisis la bonne réponse:

1) Si $xy = 7$ alors, $y \propto$ …... [$\frac{1}{x}$; $x-7$; x ; $x+7$]
2) Si les quantités 2 ; 3 ; 6 et x sont proportionnelles; alors x =… [9 ; 18 ; 12 ; 3]
3) Si $2a = 5b$; alors $\frac{a}{b}$ =…… [$-\frac{5}{2}$; $\frac{-2}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{2}$]
4) L'une des méthodes de mesurer la dispersion est …………
   [la médiane ; moyenne arithmétique ; écart-type ; le mode]
5) Si Card (X) = 5 ; Card (X× Y) = 10 ; alors Card (Y) = …. [4 ; 3 ; 2 ; 1]
6) Si $X = \{ 1 \}$, alors X^2 = …….. [1 ; (1 ;1) ; { (1 ;1) } ; { 1 }]

Question (3)

Mets le signe (√) devant la phrase vraie et le signe (×) devant la phrase fausse :

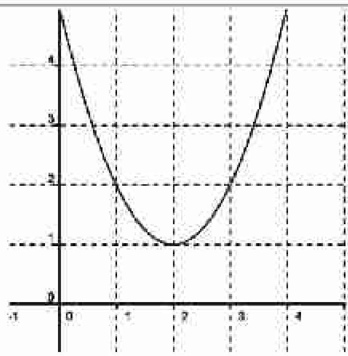
1) Si le graphe de la fonction $f = \{(1 ; 3) ; (2 ; 4) ; (3 ; 3)\}$,
   alors l'ensemble de définition de la fonction f est { 1 ; 2 ; 3 } (   )
2) Si $y \propto x$ et si $y = 6$ quand $x = 3$, alors $y = 2$ quand $x = 4$ (   )
3) Si $\sum(x-\bar{x})^2 = 36$ d'un ensemble de 9 valeurs, alors $\sigma = 4$ (   )
4) La droite qui représente la fonction $f(x) = x + 2$ coupe l'axe des abscisses
   au point (-2 ; 0) (   )
5) Si $f : X \to Y$, alors X est appelée l'ensemble de définition de la fonction (   )
6) Le diagramme sagittal de X vers Y représente une fonction



(   )

Question (4):

Complète : la colonne (A) par ce qui convient de la colonne (B)

	colonne (A)	colonne (B)
1	Si (1 ; 4) ∈ $\{2 ; x\} \times \{1 ; 4\}$; alors x = ….	6
2	Si la droite qui représente la fonction $f(x) = x - 4$ passe par le point (a ; 2); alors a = ….	1
3	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{\dots}{16}$	10
4	**Si f(x) = 5 , alors f(5)+ f(-5)=……**	± 6
5	La moyenne proportionnelle des deux nombres 4 et 9 est …….	2
6	**Dans la figure ci-contre : l'équation de l'axe de symétrie de la courbe de la fonction est x = ….** 	8

Modèle (1) Géométrie

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) : Choisi la bonne réponse :-

a) tg 45° = …..

(a) 1 (b) $2\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\sqrt{2}$

b) Si $\sin x = \frac{1}{2}$, alors m ($\angle$x) =….. où x est la mesure d'un angle aigu

a) 45° b) 60° c) 30° d) 90°

c) La distance entre les deux points (3 ; 0) et (0 ; - 4) est ……….

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

d) Si les droites $x + y = 5$ et $k\,x + 2y = 0$ sont perpendiculaires alors k = …..

a) 2 b) 1 c) 1 d) 2

e) Si A (5 ; 7) et B(1 ; - 1) alors les coordonnées de milieu de $\overline{AB}$ sont …….

a) (2 ; 3) b) (3 ; 3) c) (3 ; 2) d) (3 ; 4)

f) L'équation de la droite qui passe par le point (3 ; - 5) et parallèle à l'axe des ordonnées est …..

a) x = 3 b) y = - 5 c) y = 2 d) x = - 5

Question (2) :

a) Sans utiliser la calculatrice démontre que : sin 60° = 2 sin 30° cos 30°

b) Démontre que les points A (- 3 ; - 1), B (6 ; 5), C(3 ; 3) sont alignés.

Question (3) :

a) Si 4 cos 60° sin 30° = tg x , Trouve la valeur de x où x est la mesure d'un angle aigu

b) Si C (6 ; - 4) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (5 ; - 3), trouve les coordonnées de point B.

Question (4) :

a) Si la droite L_1 passe par les deux points (3 ;1) et (2 ;k) et la droite L_2 fait avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure 45°, trouve la valeur de k, si $L_1 // L_2$

b) ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 6 cm , BC = 8 cm. Trouve :

1) Cos A cos B – sin A sin B 2) m ($\angle$B)

Question (5) :

a) Trouve l'équation de la droite de pente égale à 2 et passe par le point (1 ; 0).

b) Démontre que les points A(3 ; - 1), B(- 4 ; 6), C(2 ; - 2) sont situés sur un cercle de centre M(-1 ; 2), puis calcule le périmètre du cercle.

Modèle (2) Géométrie

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) : Choisi la bonne réponse :-

1) 2 sin 30° tg 60° = ………

(a) $\sqrt{3}$ (b) 3 (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

2) L'équation de la droite qui passe par le point (- 2 ; - 3) et parallèle à l'axe des abscisses est …

a) x = - 2 b) x = - 3 c) y = - 2 d) y = - 3

3) Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, où x est la mesure d'un angle aigu alors $\sin 2x = \ldots$

a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) - 2 d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4) Si un cercle de centre le point d'origine et de rayon de 2 unités de longueur. Alors le point ……. appartiennent au cercle.

a) (1 ; - 2) b) (- 2 ; $\sqrt{5}$) c) ($\sqrt{3}$; 1) d) (0 ; 1)

5) La distance perpendiculaire entre les deux droites x – 2 = 0 et x + 3 = 0 est ……….

a) 1 b) 5 c) 2 d) 3

6) Si les droites dont leur pentes $\frac{-3}{2}$ et $\frac{6}{k}$ sont parallèles, alors la valeur de k = ………

a) 6 b) - 4 c) $\frac{3}{2}$ d) 2

Question (2) :

a) Si cos x tg 30° = $\cos^2 45°$, trouve m (∠x) où x est la mesure d'un angle aigu

b) Détermine la nature du triangle ayant pour sommets A(3 ; 3), B(1 ; 5), C(1 ; 3) par rapport à ses côtés.

Question (3) :

a) Trouve l'équation de la droite qui passe par les deux points (1 ; 3) et (- 1 ; - 3).Puis démontre qu'elle passe par le point d'origine.
b) Si le point (3 ; 1) est le milieu de la distance de deux points (1 ; y) et (x ; 3) ; trouve les coordonnées de point (x ; y).

Question (4) :

a) Trouve l'équation de la droite qui coupe les axes des abscisses et des ordonnées en deux parties positives de longueurs 1 et 4 unités respectivement. Puis trouve la pente de la droite
b) ABC est un triangle rectangle en B tel que AC = 10 cm , BC = 8 cm. Démontre que:
$\sin^2 A + 1 = 2\cos^2 C + \cos^2 A$

Question (5) :

a) Démontre que la droite qui passe par les points (- 1 ; 3) et (2 ; 4) est parallèle à la droite $3y - x - 1 = 0$.

b) ABCD est un trapèze tel que $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, m($\angle$B) = 90°. Si AB = 3 cm, BC = 6 cm et AD = 2 cm, trouve la longueur de $\overline{DC}$.
Puis **trouve la valeur de** cos ($\angle$BCD).

Modèle (Damg) Géométrie

Réponds aux questions suivantes :

Question (1) Mets le signe (√) devant la phrase vraie et le signe (×) devant la phrase fausse

1) La distance entre les deux points (9 ; 0) et (4 ; 0) est égale à 5 ( )
2) Si tg A = 1 , alors m ($\angle$A) = 45° ( )
3) La droite d'équation y = 2x + 1 , coupe l'axe des ordonnées en une partie de longueur -1( )
4) Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ alors la pente de $\overleftrightarrow{AB}$ × la pente de $\overleftrightarrow{CD}$ = 1 où ($\overleftrightarrow{AB}$ et $\overleftrightarrow{CD}$ ne sont pas parallèles aux deux axes) ( )
5) tg 60° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ( )
6) Soient A (1 ; 2) et B (3 ; 4), alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ est (2 ; 3) ( )

Question (2) : Choisis la bonne réponse:

1) La distance du point (4 ; - 3) à l'axe des abscisses = ... (- 3 ; 3 ; 4 ; - 4)

2) 4 cos 30° tg 60° = ... (3 ; 2 $\sqrt{3}$; 6 ; 12)

3) Si les droites d'équations x + y = 5 et kx + 2y = 0 sont parallèles, alors la valeur de k = ..
(- 2 ; - 1 ; 1 ; 2)

4) Les points (0 ; 0) ; (3 ; 0) ; (0 ; 4) ....

(forment un triangle obtusangle ; forment un triangle acutangle ; forment un triangle rectangle ; sont alignés)

5) Si $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ et si la pente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{3}$, alors la pente de $\overleftrightarrow{CD}$ est égale à ......

($\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{-2}{3}$; $\frac{-3}{2}$)

6) Si sin $x = \frac{1}{2}$, où x est la mesure d'un angle aigu alors sin $2x$ = ...

(1 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

Question (3):

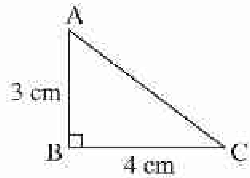
Complète : la colonne (A) par ce qui convient de la colonne (B)

	colonne (A)	colonne (B)
1	La pente de la droite qui est parallèle à l'axe des abscisses = …	10
2	$Sin^2 30° + Cos^2 30°$ = …..	0
3	Si ABCD est un rectangle, A (-1 ; -4) ; C (5 ; 4) alors la longueur de $\overline{BD}$ = …… unité de longueur	1
4	L'équation de la droite qui passe par le point d'origine et de pente = 2 est y = … x	- 3
5	L'équation de la droite qui passe par le point (2 ; - 3) et parallèle à l'axe des abscisses est y = …	2
6	la valeur de : $\frac{2\,tg\,30°}{1+tg^2\,30°}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question (4) : Complète:-

1) Si $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ et si la pente de $\overleftrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$, alors la pente de $\overleftrightarrow{CD}$ est égale à ……

2) Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle rectangle en B
AB = 3 cm, BC = 4 cm, alors sin C = …..



3) Si le point (0 ; a) appartient à la droite 3x – 4y = -12 , alors a = …….

4) Si x cos 60° = tg 45°, alors x = …..

5) La distance entre le point (4 ; 3) et le point d'origine est égale à ……

6) Si le point d'origine est le milieu du segment $\overline{AB}$ où A (5 ; -2) alors les coordonnées de point B est (…. ; ….)